

基于 PLC 技术的倒立摆系统的设计及控制试验

徐 张铁中

(中国农业大学 工学院,北京 100083)

摘 要 倒立摆在检验不同控制方法对不稳定非线性系统的处理能力时,传统上采用单片机或基于 PC 机的运动控制卡,存在控制模式单一或便携性差、成本高等缺点。针对上述问题提出采用 PLC 进行控制。通过对倒立摆平衡过程的分析,建立了数学模型,并用极点配置法确定状态反馈系数。设计制作了一级倒立摆实物模型,通过梯形图编程对不同控制方法进行检验。PLC 控制试验结果表明:在 0.01 s 的采样周期下,所制作的倒立摆能在导轨的有限长度(1.5 m)内保持摆杆 $-7^\circ \sim 7^\circ$ 的平衡状态;经过硬件和软件方面的优化,系统成本降至同类系统的 1/3。

关键词 倒立摆;极点配置法;PLC

中图分类号 O 231.2

文章编号 1007-4333(2005)03-0105-06

文献标识码 A

Design and control of a PLC based inverted pendulum system

Xu Zhe, Zhang Tiezhong

(College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract Traditionally, a SCM or a motion controller based on PC system is used for ability tests of different controlling methods in various unstable and nonlinear systems by means of controlling inverted pendulum. But there are some problems of monotonous control or inconvenience and high cost with respect to each controlling method. To solve the above problems, PLC control was suggested by the author. Based on the analyses of balance process of an inverted pendulum, a mathematical model was set up, the feedbacks were confirmed by using pole placement design and a model of inverted pendulum was realized. The whole system can test different controlling methods through programming ladder diagram. The results of PLC controlling experiments illustrated that under a sampling time of 10 ms, the pendulum could keep the balance between -7° and $+7^\circ$ on a length-limited track (1.5 m). After the optimizations of both the hardware and software, the whole system cost was reduced to 1/3 of a resembling one's.

Key words inverted pendulum; pole placement design; PLC

倒立摆属于多变量、快速、非线性和绝对不稳定系统。目前,国内外对倒立摆进行的一系列研究,绝大部分是建立在仿真基础上的对控制算法的研究,较少有对实际的机械装置实行控制^[1]。国内对倒立摆进行实物控制主要通过基于 PC 机的运动控制器来完成,研究用到的机械系统大多从生产厂家购置^[2];控制效果虽好,但价格昂贵,二次开发困难,教学环节中使得学生动手的机会大打折扣。

对倒立摆系统研究的重要性不仅在于其在高技

术领域的广泛应用,而且在于在新的控制方法不断提出的同时,研究者可以通过倒立摆校验新的控制方法是否具有较强的处理多变量、非线性和绝对不稳定系统的能力。采用 PLC 控制的倒立摆系统,使用梯形图编程,易于掌握,适合教学开发。通过缆线 PLC 可输入不同的模块化程序,实现校验控制方法的多样化。与基于 PC 机的运动控制卡相比,PLC 还具有便携性强,性价比高等优点。国内使用 PLC 对倒立摆进行平衡控制的尚未见报道。

收稿日期:2004-11-27

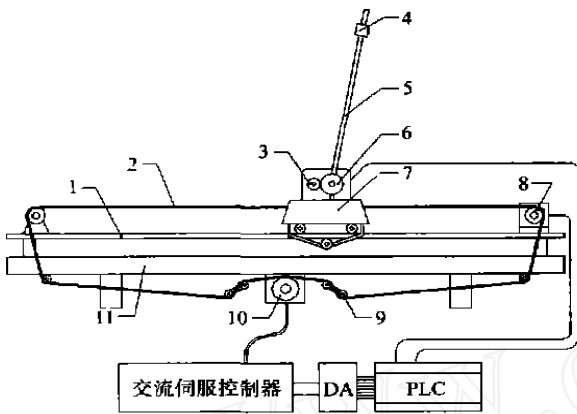
基金项目:国家高技术研究发展计划项目(2001AA422300)

作者简介:徐,硕士研究生;张铁中,教授,博士生导师,主要从事生物生产自动化和农业机器人的研究。

1 倒立摆系统的平衡过程

1.1 结构与特点

倒立摆系统主要由轨道、摆杆、台车、交流伺服电动机及其控制器、编码器反馈系统、PLC控制系统,以及传动系统组成(图1)。其中反馈系统,控制系统和交流伺服电动机及其控制器是该系统的主要部件。



1. 轨道;2. 牵引绳;3. 转角放大轮系;4. 平衡块;5. 摆杆;6. 转角检测编码器;7. 台车;8. 位置检测编码器;9. 张紧轮;10. 交流伺服电动机;11. 底座

图1 倒立摆系统结构简图

Fig. 1 Schematic diagram of inverted pendulum

反馈系统由2个OMRON公司的E6B2-CWZ6C型增量式光电编码器组成,分别检测摆杆倾斜角度和台车移动的距离。编码器的测量精度为 360 r^{-1} ,即每旋转1周产生360个脉冲信号。转角放大轮系可将摆杆转轴处的角度放大1倍,使精度提至 720 r^{-1} ,即具有提高测量灵敏度的特点。

控制系统包括1个三菱FX-2N 60MT型PLC和1个FX-2DA为2通道12位D/A转换模块。从编码器采集到的有关台车和摆杆的信息首先在PLC中进行运算处理。在每个 0.01 s 采样周期结束的同时,PLC立即将处理后的数据传送到DA模块。从DA模块输出的电压信号通过交流伺服控制器驱动交流伺服电机。在使用DA模块前,首先要进行模拟电压输出的增益值和0点偏移量的调整。FX-2DA模块的模拟电压输出范围为 $0\sim 10\text{ V}$ 。

安川SGMAH型单相交流伺服电动机根据倒立摆系统对控制力输入的要求,调整在扭矩控制模式下工作。交流伺服控制器是实现PLC控制伺服

电动机的关键组件。Pn400为控制器内部电压增益的设定指令,根据倒立摆系统中DA模块的最大输出电压值为 10 V ,须将Pn400出厂设定值30改为100。一方面,控制器通过其上CN1端口接收来自PLC的模拟和数字信号。CN1端口是一个50针的SCI接口,其第9和10针脚(扭矩电压输入端 $\pm 1\sim \pm 10\text{ V}$)接受来自DA模块的电压指令,控制电机扭矩的输出;40针脚与PLC上的输出端相连,实现PLC程序对控制器伺服开关S-ON的控制。另一方面,控制器的CN2端口与伺服电机构成内部反馈电路,对电机进行实时控制。

1.2 平衡过程

当倒立摆摆杆在垂直于转轴和摆杆决定的平面内从垂直状态向两侧产生倾斜时,平衡状态被打破,PLC控制系统以 0.01 s 的采样周期采集数据。第1个采样周期完成后,PLC将采样周期开始和结束时测得的2个角度值以脉冲个数的形式保存在内部的寄存器当中。第2个采样周期开始时,PLC对已保存的数据进行处理。得出的恢复平衡态所需的控制力,先以数字量形式传到DA模块,之后通过DA模块转化为驱动伺服电机所需的电压信号,经过交流伺服控制器的放大,PID等运算后输入给交流伺服电机,最终以力的形式通过牵引绳拉动台车,进而消除摆杆相对于台车垂直方向产生的偏角。

被牵引绳拉动的台车带着摆杆在轨道上运动后,位置检测编码器也开始产生脉冲信号。此后,系统的2个编码器都向PLC提供判断倒立摆运行的状态参量,对电机输出力的大小产生实时影响。只要倒立摆不稳定在最初的平衡状态,控制系统将通过交流伺服电动机进行不断地调整,表现在倒立摆上,就是台车带着摆杆在水平轨道上的某一位置左右往复运动。

2 倒立摆系统数学模型的建立

1) 倒立摆数学模型及状态变量。

倒立摆系统受力分析见图2。将倒立摆分为摆杆和台车2部分,经线性化(\sin , \cos)后分为4个线性模型:

三菱公司. Mitsubishi. fx_{2n} special function block user's guide.

株式会社安川电机. 安川交流伺服电动机系列 SGMH/SGDM用户手册设计 维护篇. 2002.

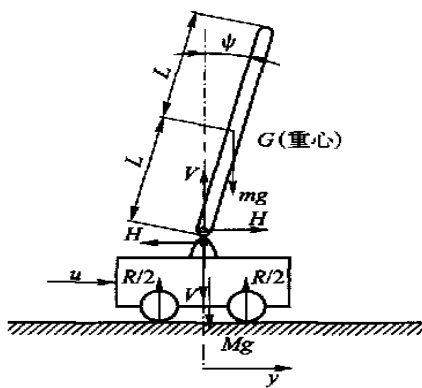


图 2 倒立摆系统受力分析图

Fig. 2 Force analysis of inverted pendulum system

摆杆绕重心的旋转运动
 $I \ddot{\psi} = VL \ddot{\psi} - HL$
 摆杆重心水平方向的运动
 $H = m \ddot{y} + mL \ddot{\psi}$
 摆杆重心垂直方向的运动
 $V = mg = 0$
 台车水平方向的运动
 $u - H = M \ddot{y}$

图 2 倒立摆系统受力分析图

Fig. 2 Force analysis of inverted pendulum system

摆杆绕重心的旋转运动

$$I \ddot{\psi} = VL \ddot{\psi} - HL$$

摆杆重心水平方向的运动

$$H = m \ddot{y} + mL \ddot{\psi}$$

摆杆重心垂直方向的运动

$$V = mg = 0$$

台车水平方向的运动

$$u - H = M \ddot{y}$$

其中: I 为摆杆绕其重心的惯性矩; ψ 为摆杆垂直倾斜角度; V 为摆杆和台车支点的垂直方向力; H 为摆杆和台车支点处所受水平方向力; $2L$ 为摆杆长度; m 为摆杆质量; u 为系统输入给台车的水平方向力; M 为台车质量; y 为台车的水平坐标。

定义摆杆的角度和角速度及台车的位置和速度为系统的 4 个状态变量 x_1, x_2, \dots, x_4 。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

2) 系统状态方程和输出方程。

线性化后的系统状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

式中: x 为四维的状态向量; A 和 B 分别为系统矩阵和输入矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

其中: 参数 a, b, c, d 为常数,

$$a = \frac{mL(m+M)g}{I(m+M) + mL^2}, c = -\frac{mL}{I(m+M) + mL^2},$$

$$b = -\frac{m^2L^2g}{I(m+M) + mL^2}, d = \frac{I + mL^2}{I(m+M) + mL^2}$$

选择摆杆的倾斜角度 ψ 和台车的水平位置 y 作为倒立摆系统的输出, 输出方程为

$$y = \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = Cx$$

式中 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

3) 系统反馈系数的极点配置法求解。

将系统状态反馈方程 $u = Kx$, 其中 K 为系统的反馈向量, 带入式(1)得

$$\dot{x} (A + BK) x \quad (2)$$

系统稳定的充要条件是式(2)的特征值都要处于复平面的左半面^[3,4]。矩阵 $(A + BK)$ 的特征值是方程式 $|Is - (A + BK)| = 0$ 的根, 表达为

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \times$$

$$[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = 0$$

整理得

$$s^4 - (ck_2 + dk_4)s^3 - (a + ck_1 + dk_3)s^2 + (ad - bc)k_4s + (ad - bc)k_3 = 0 \quad (3)$$

适当选择式(3)中反馈系数 k_1, k_2, \dots, k_4 , 则系统的特征根即可取得所希望的值。再设特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4$ 为关于 s 的四次代数方程式的根, 则:

$$s^4 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)s^3 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)s^2 - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4)s - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0 \quad (4)$$

为使控制系统的特征根为任意指定的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4$, 式(3)和(4)中多项式 s 对应项系数要一致, 因此:

$$\left. \begin{aligned} ck_2 + dk_4 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ -(a + ck_1 + dk_3) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\ -(ad - bc) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\ (ad - bc)k_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{aligned} \right\} (5)$$

在选定 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4$ 的情况下, 由式(5)可解出反馈系数 k_1, k_2, \dots, k_4 。

3 PLC控制系统编程

本研究中倒立摆系统采用三菱 FX-PCS/ WIN-C 型控制软件。通过编写梯形图程序, 实现对台车位置、速度、摆杆转角、转速等数字量的运算处理。系统的 PLC 控制流程见图 3。程序中寄存器的分配在反馈控制中起着重要的作用:

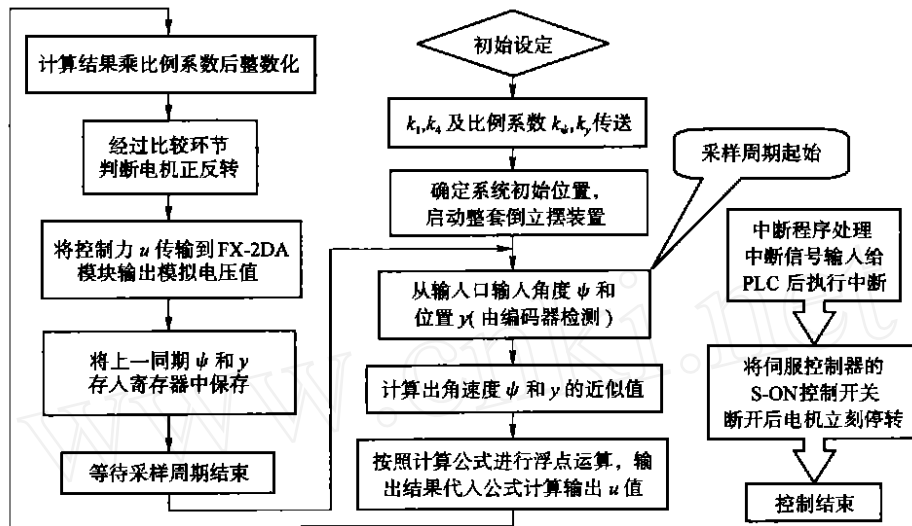


图 3 PLC 程序流程图

Fig. 3 Flow chart of the PLC program

1) 寄存器的初始设定。

对 PLC 内部数据寄存器进行地址分配: 设定掉电保持型数据寄存器 D300 ~ D399 为常数寄存区, 存放有反馈系数 k_1, k_2, \dots, k_4 和算术比例系数 k_x 和 k_y 。设定寄存器 D100 ~ D199 为计算寄存区, 存储倒立摆控制程序所需的浮点运算结果。设定寄存器 D0 ~ D99 为运算结果输出寄存区, 负责对 DA 模块传送数据及伺服电机转向判断等工作。

2) 台车位置及摆杆角度信息的采集处理。

当编码器检测出摆杆角度及台车位置的变化时, PLC 内部的高速计数器以脉冲个数的形式记录摆杆角度和台车位置信息。计数器 C252 中存放摆杆转角信息, C253 存放台车位置信息。程序运行过程中, 执行到需要计算摆杆角速度或台车线速度时, 用角度或位置的当前值减去上一个采样周期的对应值, 再除以采样周期, 得到角速度与线速度的近似值。具体计算公式为:

$$\frac{N - L}{T_s} = \dot{\psi}, \quad \frac{y_N - y_L}{T_s} = \dot{y}$$

其中: T_s 为系统的采样周期; N 为当前摆杆角度值; L 为上一个采样周期的摆杆角度值; y_N 为当前台车位置值; y_L 为上一采样周期的台车位置值。采用这种方法求某一时刻的速度值时, 忽略了状态变量 ψ 和 y 有 $1/2$ 采样周期的滞后, 所以只能在采样周期相对非常小 (0.01 s) 的条件下使用^[6]。

3) 系统程序优化。

PLC 程序中, 寄存器 D100 和 D101 中存放着控制力 u 的运算结果信息。在程序中加入 1 个针对控制力 u 值大小的 CMP 比较指令^[5], 可以使原本需要输出范围为 -10 ~ 10 V 的 DA 扩展模块用 0 ~ 10 V 的代替, 这样降低硬件成本约 1 200 元 (人民币)。执行比较指令有 3 种结果: a. 当数据寄存器 D100 (D101) 中存放的值 > 0 时, 代表摆杆向逆时针方向倾斜, 经过比较, PLC 内部辅助继电器 M0 接通, 电机正转; b. 当数据寄存器 D100 (D101) 中的值 = 0 时, 表示摆杆这时刚好处于平衡位置, PLC 内部辅

助继电器 M1 接通,电机停止;c.当数据寄存器 D100 (D101) 中的值 < 0 时,表示摆杆顺时针方向旋转, PLC 内部辅助继电器 M2 接通,电机反转。

4 倒立摆在不同特征根下的平衡试验

为验证采用极点配置法选定的不同特征根下的倒立摆系统参数与时间的响应关系,设计如下试验。

确定倒立摆的结构参数为:台车质量 $M = 481.0 \text{ g}$;摆杆由铝合金摆杆 (45.4 g) 和钢制平衡块 (70.1 g) 组成,质量 $m = 115.5 \text{ g}$;摆杆重心到转轴的距离 L (图 4) 由公式

$$L \frac{1}{2} L = (650 - 10 - L) \times 70.1 + \frac{1}{2} (650 - L)^2 L$$

其中铝合金摆杆的长度密度 $L = \frac{45.4}{650} \text{ g/mm}$, 计算

得 $L = 51.6 \text{ cm}$;摆杆绕其重心的惯性矩 $I = \frac{mL^2}{3} = 1.025 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$ 。



图 4 摆杆重心的位置

Fig. 4 Core's position of the pendulum

倒立摆结构参数确定后,可求出常数 a 、 b 、 c 、 d 的确定值 (取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$),从而得到系统矩阵 A 和输入矩阵 B 。再利用 Matlab 中的 place 函数^[6-7],按照系统稳定的充要条件,选 3 组特征根带入式 (3) 中,即求得与 3 组特征根相对应的系统的 3 组反馈系数 (表 1)。

表 1 选定特征根下的倒立摆系统的反馈系数

Table 1 Feedbacks of the selected latent roots

组号	选定特征根	系统反馈系数	选定特征根在复平面上的分布
1	$s_1 = -0.5 + j, s_2 = -0.5 - j,$ $s_3 = 1 + 0.5j, s_4 = 1 - 0.5j$	$k_1 = 7.4604, k_2 = 1.1446,$ $k_3 = 0.0560, k_4 = 0.1343$	
2	$s_1 = -1 + 2j, s_2 = -1 - 2j$ $s_3 = -2 + j, s_4 = -2 - j$	$k_1 = 12.7330, k_2 = 2.8435,$ $k_3 = 0.8953, k_4 = 1.0744$	
3	$s_1 = -4 + 3j, s_2 = -4 - 3j,$ $s_3 = -5 + j, s_4 = -5 - j$	$k_1 = 67.8036, k_2 = 17.5954,$ $k_3 = 23.2780, k_4 = 16.4020$	

注: 图 5 中 1、2、3 特征根同此。

将 3 组反馈系数值分别输入到 PLC 程序中,并选取相同的初始条件 (摆杆初始转角 $< 10^\circ$) 进行倒立摆平衡试验。其中摆杆转角和台车位置 y 组成系统的 2 个状态变量,控制力 u 是 PLC 通过公式 $u = k_1 \ddot{\psi} + k_2 \dot{\psi} + k_3 y + k_4 \dot{y}$ 在实时控制中求得的。3 组特征根下倒立摆系统的平衡情况见图 5。

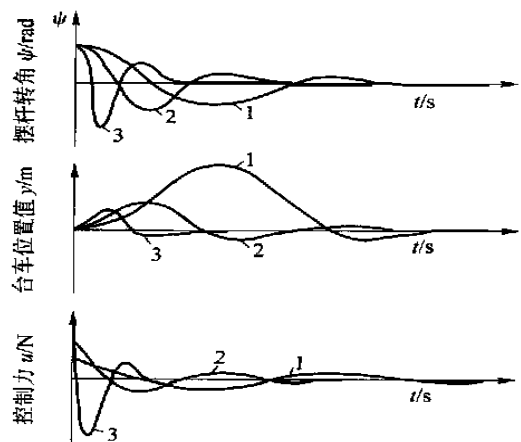
在选定的不同特征根下对倒立摆进行平衡试验,对以下结论^[8]进行验证。

1) 对于 3 组满足条件的特征根,倒立摆系统参数随着时间的变化都能稳定在平衡状态。

2) 控制系统的特征根,按 1、2、3 组的顺序在复平面的左侧逐渐远离原点。离原点越远的可以在较短的时间内达平衡状态,但相应的控制力 u 也要求更高。

3) 随着 1、2、3 组特征根值的变化,摆杆倾角的振幅在平衡过程中逐渐递增,同时台车远离 0 点的

移动距离依次递减。



1、2、3 分别对应表 1 中的 3 组特征根

图 5 不同特征根下倒立摆系统参数随时间的变化
Fig. 5 Effects of different latent roots on the balance process of inverted pendulum

在实际控制中,当向 PLC 中输入第 3 组反馈系数并运行后,倒立摆在有限长轨道上的平衡时间较前 2 组的都长,证实该倒立摆在反馈系数下较大的情况下能够更好的处理平衡中出现的摩擦力不均匀及外界随机干扰的问题。

5 结束语

利用 PLC 对倒立摆进行闭环控制,证明基于极点配置法的倒立摆系统设计合理,控制算法正确。同时验证了 PLC 的实时数据运算能力,为解决工业控制中类似的闭环控制提供了应用实例。

参 考 文 献

[1] 王磊,王旭永. 车载倒立摆系统的拟人智能控制研究

[D]. 上海:上海交通大学,2001

- [2] 王加银,李洪兴. 基于变论域自适应模糊控制的倒立摆仿真与实物实现[D]. 北京:北京师范大学,2002
- [3] 仝茂达. 线性系统理论和设计[M]. 北京:中国科学技术大学出版社,1998. 122 - 243
- [4] 董景新,赵长德. 控制工程基础[M]. 北京:清华大学出版社,2002. 109~139
- [5] 张万忠,周渊深. 可编程控制器应用技术[M]. 北京:化学工业出版社,2002. 100~150
- [6] 尚涛. 工程计算可视化与 Matlab 实现[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002. 301~303
- [7] 刘金琨. 先进 PID 控制及其 MATHLAB 仿真[M]. 北京:电子工业出版社,2003. 230~250
- [8] 末松良一(日). 机械控制入门[M]. 王献平,高航(译). 北京:科学出版社,2001. 85~123

科研简讯 ·

“行走式节水灌溉技术及机具中试与示范”项目通过验收

该项目由我校鄂卓茂教授和刘清平副教授主持,2005年4月15日通过教育部科技司验收,项目完成了合同规定的指标。该项目经转化与示范,形成了人造底墒、施水播种、苗侧开沟灌溉配套抗旱保苗技术模式。3个示范点示范面积 1.754 万 hm^2 ,增产玉米 2 554.93 万 kg,增收 2 043.94 万元;2 年辐射推广面积 46.67 万 hm^2 ,增产玉米 3.5 亿 kg,增收 2.8 亿元。吉林省推广面积已达 66.67 万 hm^2 。同时开发出更具广范应用前景的垄作播种机和大垄双行播种机,2 年生产机具 8 300 台,增加税收 56 万元,利润 113 万元。全省已有 9 个厂生产垄作播种机。

(科学技术处供稿)