

求解非线性动力学方程的渐近数值方法

梅树立¹ 邢如义² 张森文³

(1. 中国农业大学信息与电气工程学院,北京 100083; 2. 河北科技学院,河北 邯郸 510632;
3. 暨南大学应用力学研究所,广州 510632)

摘要 利用精细积分技术对同伦摄动方法进行了改进,构造了一种求解非线性动力学方程的新的渐近数值方法。数值算例结果表明,该方法的计算精度高于简单的同伦摄动方法,同经典的精细积分法相比,该方法计算量小,对时间步长不敏感,更适合于求解非线性问题。

关键词 同伦摄动法;精细积分技术;非线性方程

中图分类号 O 241.4

文章编号 1007-4333(2004)04-0092-05

文献标识码 A

Asymptotic numerical method for nonlinear dynamic equations

Mei Shuli¹, Xing Ruyi², Zhang Senwen³

(1. College of Information and Electricity Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;
2. Computation Center, Hebei college of science and technology, Handan 056021, China;
3. The Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract A new asymptotic numerical method for nonlinear dynamic equations was proposed. In this method, the homotopy perturbation method was improved by using the precise integration technique. The result of numerical example showed that the new method was more accurate than the simple homotopy perturbation method. And the computational complexity was less than the traditional precise integration method. Furthermore, this method was not sensitive to the time step. It was thus suitable for solving nonlinear equations.

Key words homotopy perturbation method; precise integration method; nonlinear equations

同伦摄动方法是近年来提出的一种新的渐近数值方法^[1~5],该方法是在人工参数^[6]摄动法的基础上发展而来的。为方便对不带小参数的微分方程采用摄动法求解,刘高联^[6]等提出了人工参数法,但增加人工参数具有很大的技巧成分。为此何吉欢提出了同伦摄动技术,首先针对所求非线性微分方程构造同伦函数,然后将同伦参数作为摄动参数对该方程的解按摄动理论进行展开并求解。该方法在求解一维二阶非线性微分方程时具有很高的精度,但在求解微分方程组时,为消除长期项,需要推导非常复杂的可解性条件,计算精度也很难满足工程需要,这无疑制约了该方法的使用。文献[3]~[5]将p-ade逼近理论溶入该方法构造了一种渐近数值方

法并成功求解了具有线性本构关系的非线性弹性力学问题。本研究的目的是将精细积分技术^[7]和同伦摄动方法相结合,构造一种求解非线性动力学方程的渐近数值方法,以期取得较高的计算精度和效率。

1 结构非线性动力方程的精细积分计算

结构非线性动力系统可表示成下列形式^[7]

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = F(\dot{q}, q, t) \quad (1)$$

其中, q 为 n 维未知函数向量, $M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = 0$ 是线性子系统, $F(\dot{q}, q, t)$ 是非线性部分。在哈密顿体系下,根据哈密顿正则方程得到方程(1)的等价形式

收稿日期: 2003-12-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372036); 广东省自然科学基金资助项目(021197)

作者简介: 梅树立,博士,主要从事计算力学和计算机图形图像技术的研究。

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= H v + f(v, t) \\ v &= (q^T, p^T)^T = (v_1, v_2, \dots, v_{2n})^T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} p &= M \dot{q} + \frac{1}{2} G q \\ H &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} M^{-1} G & M^{-1} \\ \frac{1}{4} G M^{-1} G - K & -\frac{1}{2} G M^{-1} \end{bmatrix} \\ f &= \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

方程(2)的通解为

$$v(t) = e^{H(t-t_k)} v^{(k)} + e^{Ht} \int_{t_k}^t e^{-Ht} f(v, t) dt \quad (4)$$

式中 v 和 v^k 分别表示所求解向量在时刻 t 和 t_k 的值。式(4)中积分项的求解方法有很多,较常用的方法是将非线性右端项 $f(v, t)$ 在 $t = t_k, v = v^k$ 处按如下方式展开

$$f(v, t) \approx r_0 + (t - t_k) r_1 \quad (5a)$$

其中 $r_0 = f(v^k, t_k)$, 对于显式方法

$$r_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t=t_k} + \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial f}{\partial v_i} (H v^k + f(v^k, t_k)) \right)_i \quad (5b)$$

v_i 表示向量 v 中得第 i 个元素。对于隐式方法

$$r_1 = \frac{f(v^{k+1}, t_{k+1}) - f(v^k, t_k)}{t_{k+1} - t_k} \quad (5c)$$

由此可得方程(1)解的递推公式为

$$v^{k+1} = e^{H(t_{k+1}-t_k)} (v^k + H^{-1}(r_0 + H^{-1}r_1)) - H^{-1}(r_0 + H^{-1}r_1 + (t_{k+1} - t_k) r_1) \quad (6)$$

当时间步长 $t_{k+1} - t_k$ 不变时,常矩阵 $e^{H(t_{k+1}-t_k)}$ 可通过指数矩阵的精细算法精确求得,因此,该递推公式的误差主要来自方程(5)中 $f(v, t)$ 的近似表达。

2 基于精细积分的同伦摄动方法

同伦函数的构造方法有很多,在此,针对方程(2)构造线性同伦函数:

$$\dot{v} - H v - f(A) + \lambda [f(A, 0) - f(v, t)] = 0 \quad (7)$$

其中, A 是已知初值, $\lambda \in [0, 1]$ 是同伦参数。根据摄动理论,将方程(7)的解表示为参数 λ 的级数形式

$$v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots \quad (8)$$

将式(8)代入方程(7),并令方程两端同次幂的系数相等,得

$$0: \dot{v}_0 = H v_0 + f(A, 0) \quad (9)$$

$$1: \dot{v}_1 = H v_1 - f(A, 0) + f_1 \quad (10)$$

$$2: \dot{v}_2 = H v_2 + f_2 \quad (11)$$

其中, f_1 和 f_2 分别是 $f(v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2, t)$ 的展开式中含 λ^1 和 λ^2 的项。方程(9)是非齐次线性常微分方程组,其通解^[11]为

$$v_0 = e^{Ht} (A + H^{-1} f(A, 0)) - H^{-1} f(A, 0) \quad (12)$$

其中 A 取做 v_0 的已知初值。这样, v_1 和 v_2 的初值可取为 0, 因此,方程(10)和(11)的解形式可分别表示为

$$v_1 = (e^{Ht} - I) (H^{-1} (f_1 - f(A, 0))) \quad (13)$$

$$v_2 = (e^{Ht} - I) (H^{-1} f_2) \quad (14)$$

矩阵指数函数 e^{Ht} 可通过精细积分方法精确求得。将按照式(12)~(14)得到的结果代入式(8),取 $\lambda = 1$, 便可得到方程(2)的数值解。

为提高计算精度,可令时间步长为 Δt , 一系列等步长 Δt 的时刻为

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_k = k \cdot \Delta t, \dots$$

将方程(12)~(14)中的初始值 A 修改为 t_k 时刻的解,便可通过递推的积分公式得到 t_{k+1} 时刻的值,即

$$v_0^{k+1} = T (v^k + H^{-1} f(v^k, t_k)) - H^{-1} f(v^k, t_k) \quad (15)$$

$$v_1^{k+1} = (T - I) (H^{-1} (f_1 - f(v^k, t_k))) \quad (16)$$

$$v_2^{k+1} = (T - I) (H^{-1} f_2) \quad (17)$$

其中, $T = e^{H \Delta t}$ 。为加快收敛速度,不妨将最终的求解格式表示为

$$v^{k+1} = v_0^{k+1} + \lambda_1 v_1^{k+1} + \lambda_2 v_2^{k+1} \quad (18)$$

其中, λ_1 和 λ_2 为常数,可通过 p 法逼近理论确定。当 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2$ 时,该方法和文献[7]方法在形式上几乎相同,计算量也相同。

3 数值结果及讨论

例 1 考虑双质点系微分方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \cos 4t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

初始条件 $\{u_i\} = \{\dot{u}_i\} = 0, i = 1, 2$, 在 $t \in [0, 10]$ 范围内用同伦摄动法求解此系统方程,并与精细积分法的计算结果进行比较(表 1)。可见,本文中提出的渐近数值方法(ANM)的计算精度要高于传统的精细积分方法(PIM)。采用简单的同伦摄动方法求

解微分方程组,为消除长期项,需要推导非常复杂的可解性条件,计算精度也很难满足工程需要。采用摄动理论中的直接展开方法虽然简单,但无法满足

精度要求;虽然使用 p 逼近技术可使计算精度得到改善,但计算量很大,公式推导复杂,所以本文中并没有列出该方法的计算结果。

表 1 取不同时间步长时位移与速度的最大计算相对误差

Table 1 The max relative error of displacement and velocity at different time steps (10⁻³)

数值方法	时间步长	u_1	u_2	\dot{u}_1	\dot{u}_2
PIM	0.100	491.120 13	1 097.836 36	10 632.479 22	90.059 25
	0.010	1.194 92	7.671 21	156.584 78	2.452 00
	0.001	0.013 33	0.088 78	13.988 22	0.010 72
ANM	0.100	211.725 98	987.052 06	155.391 02	58.138 57
	0.010	0.757 61	6.012 71	44.089 46	1.865 51
	0.001	0.008 50	0.088 78	1.004 47	0.007 75

例 2 考虑弹簧摆问题,图 1 所示弹簧摆是 2 自由度(x 和 θ)系统,其中 k 为弹簧刚度, m 为摆锤质量, g 为重力加速度, l 为弹簧自由长度。

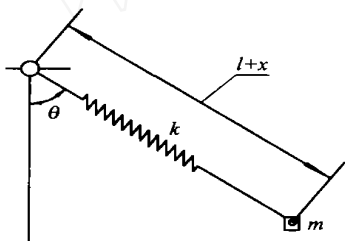


图 1 弹簧摆示意图

Fig. 1 The sketch of spring pendulum

该系统的非线性自由振动方程为

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + kq = F(\dot{q}, q, t)$$

其中: $q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ m & 0 \\ 0 & -\frac{g}{l} \end{bmatrix}, F = (\dot{q}, q, t) =$$

$$\begin{bmatrix} (l+x)^2 - g(1-\cos\theta) \\ \frac{g}{l} - 2\dot{x}\dot{\theta}/(l+x) - g\sin\theta/(l+x) \end{bmatrix}$$

引入广义动量

$$p = M\dot{q} + \frac{1}{2} G\dot{q} = M\dot{q} = \dot{q}$$

可得与其等价的一阶微分方程组

$$\dot{v} = Hv + f$$

其中

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (l+v_1)v_4^2 - g(1-\cos v_2) \\ \frac{g}{l}v_2 - 2v_3v_4/(l+v_1) - g\sin v_2/(l+v_1) \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

取 $m = 1.0$, $l = 1.0$, $k = 19.613 3$, 初始条件为 $v_1^{(0)} = 0.1$, $v_2^{(0)} = 1.0 471 975$, $v_3^{(0)} = 0.0$, $v_4^{(0)} = 0.0$ 。

在此,主要将本文中提出的基于精细积分技术的同伦摄动方法与经典的精细积分方法的计算结果

进行对比。由于该非线性问题没有精确的解析表达式,这里采用精度较高的 ABM (adams-bashforth-moulton) 方法的计算结果做为对比依据,计算相对精度取 1.0×10^{-12} 。在计算中,取同伦摄动方法中摄动级数的前 3 项,时间步长 $\Delta t = 0.05 \text{ s}$,在精细积

分法中,非线性项只取 1 次 Taylor 级数展开。计算结果见图 2。可见,采用本文方法求解时,弹簧摆的伸长量、摆角、伸长速度和角速度的计算精度均明显高于经典的精细积分方法。

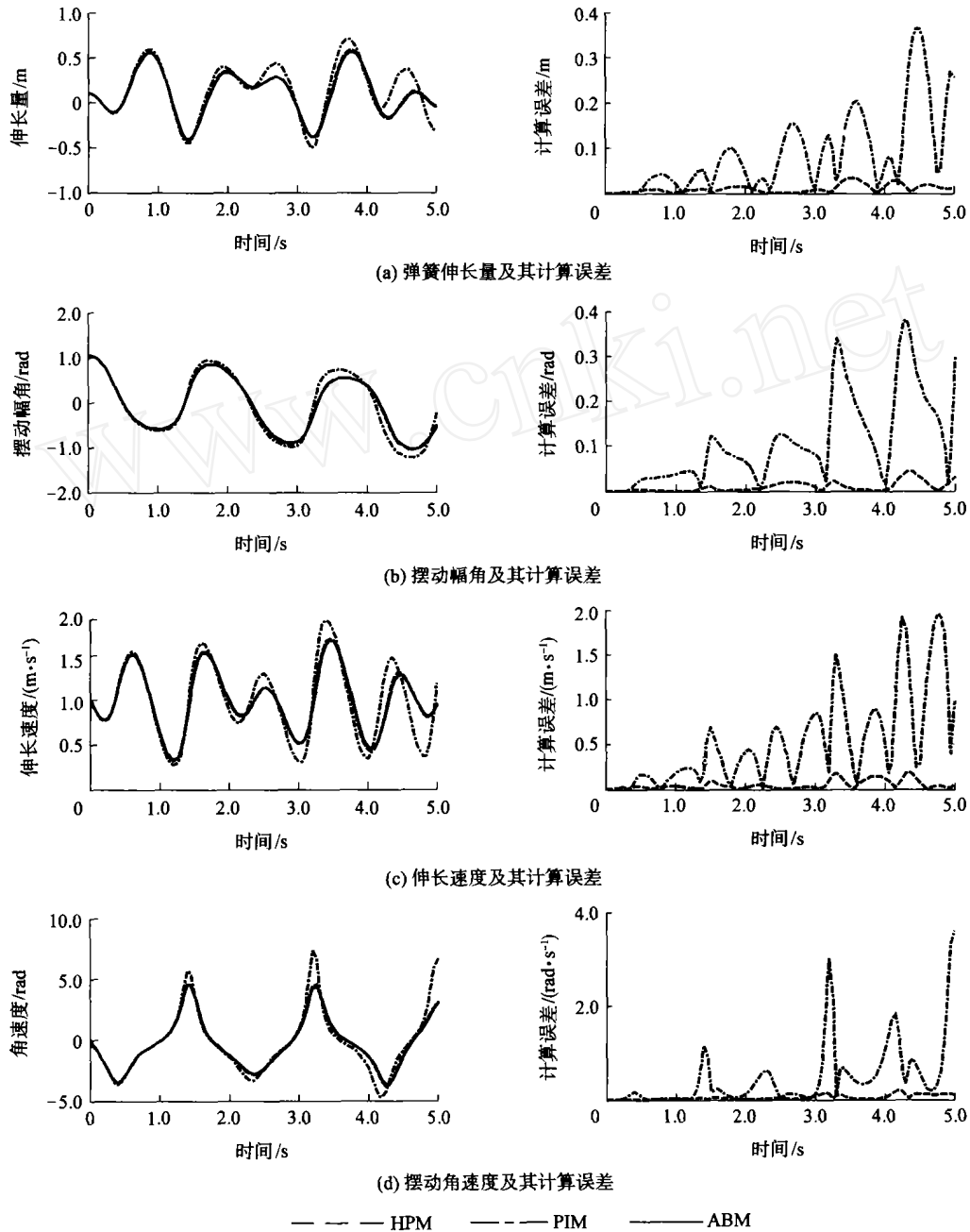


图 2 采用不同方法时弹簧摆的伸长量、摆角、伸长速度和角速度的计算结果及其误差与时间的关系

Fig. 2 The evolvement curve of the numerical result and error of the extension x , the angle, the extension velocity and the angular velocity of the the spring pendulum example vs. the time parameter

4 结束语

精细积分方法是求解线性齐次动力学方程的高精度方法。笔者将该方法与同伦摄动技术相结合提出的渐近数值方法同时具有二者的优点,既推广了精细积分方法,使其可应用于非线性动力学方程的求解,同时发展了同伦摄动技术,使其计算精度有了很大提高。数值算例结果表明,在相同的计算时间复杂度下,本文方法的计算精度高于传统的精细积分方法,从而验证了该方法的优越性。

参 考 文 献

- [1] He Jihuan. Homotopy perturbation method: a new non-linear analytical technique[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 135: 73 ~ 79
- [2] He Jihuan. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems [J].

International Journal Nonlinear Mechanics, 2000, 35(1): 37 ~ 43

- [3] Mallil E, Lahmam H, Damil N, Potier-Ferry M. An iterative process based on homotopy and perturbation techniques[J]. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 190: 1845 ~ 1858
- [4] Abichou H, Zahrouni H, Potier-Ferry M. Asymptotic numerical method for problems coupling several nonlinearities[J]. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191: 5795 ~ 5810
- [5] Elhage-Hussein A, Potier-Ferry M, Damil N. A numerical continuation method based on Padé approximants[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37: 6981 ~ 7001
- [6] 刘高联. 奇异摄动理论发展的新方向: 人工参数法和反摄动法[A]. 见: 刘宇陆. 现代数学和力学(MMM)[C]. 上海: 上海大学出版社, 1997. 47 ~ 53
- [7] 钟万勰. 暂态历程的精细积分算法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(1): 1 ~ 6

(上接第 91 页)

2 结束语

影响公司投资决策的因素不仅有公司之间的相互作用,而且还有公司所面对的不确定性。在标准的经济学教科书中,根据寡头竞争理论认为,如果已经在市场上的企业采取一些措施并向潜在的竞争者发出强有力的不利信号,那么那些准备进入市场的企业将不得不搁置其投资计划,但从本文中的分析可知,不确定性将在一定程度上抵消已经在市场上的企业所采取的威胁性政策的有效性。因此,企业在制定投资决策的时候应把不确定性放在一个重要的位置上加以考虑。这需要用合适的方法处理不确定性因素的影响,而期权博弈理论正是分析这类问题的有力工具。

参 考 文 献

- [1] Dixit A K, Pindyck R S. Investment under uncertainty [M]. Princeton (USA): Princeton University Press, 1994. 309 ~ 314
- [2] Huisman K J M. Technology investment: a game theoretic real options approach [M]. Boston (USA): Kluwer Academic Pub, 2001. 259
- [3] Smit H T J, Ankum L A. A real options and game-theoretic approach to corporate investment strategy under competition[J]. Financial Management, Autumn, 1993, 22(3): 241 ~ 250
- [4] 安瑛晖,张维. 期权博弈理论的方法模型分析与发展[J]. 管理科学学报, 2001, 4(1): 38 ~ 44
- [5] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1996. 207 ~ 230