中国农业大学学报　2004,9(4):88～91,96
Journal of China Agricultural University

期权博弈理论在不确定性投资决策中的应用

赵 滟[1]　安玉发[1]　赵 涛[2]
(1. 中国农业大学 经济管理学院,北京 100083; 2. 复旦大学 管理学院,上海 200433)

摘　要　应用期权博弈理论方法分析了存在竞争条件下的不确定性投资决策问题。建立了一个双寡头模型,用实物期权方法计算了模型中 2 个公司的价值,并分析了模型的均衡状态,给出了影响产品需求的随机因素位于不同区间上时,2 公司的均衡状态及其最优的投资决策。分析结果表明,随着影响产品需求的随机因素值的变化 2 公司的最优策略是,做领导者、跟随者或者采取对二者无差别的态度;只有当随机变动值非常大时,同时投资对 2 公司而言才可能是最优的策略。

关键词　实物期权; 不确定性; 期权博弈
中图分类号　F 830.59　　**文章编号**　1007-4333(2004)04-0088-04　　**文献标识码**　A

An application of option games theory in investment under uncertainty

Zhao Yan[1], An Yufa[1], Zhao Tao[2]
(1. Economic and Management College, China Agricultural University, Beijing 100083, China;
2. Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract　The theory of option games is a powerful tool in to dealing with investment under uncertainty and competition, A model of duopoly under uncertainty was formed. The values of the two firms were calculated by real option methods, the possible equilibriums was checked and the optimal investment rules of the two firms was determined. The results showed that the two firms' strategies were to be the leader, the follower or to be indifferent in the two roles, which were based on the value of stochastic factor that affected the demand of the product. Only if the value of stochastic factor became very large, simultaneous investment would be the two firms' optimal decision.

Key words　real options; uncertainty; option games

期权博弈理论是近年来发展迅速的一门新兴交叉学科,它是在实物期权理论与博弈论的基础上发展起来的决策分析方法,被认为是解决存在竞争条件下的投资决策问题的新工具。

Dixit 和 Pindyck[1]在其教科书中讨论了一个简单的双寡头模型,该模型中的 2 个公司都是尚未进入市场的。Dixit 和 Pindyck 分别计算了这 2 个公司的价值,但并没有详细的讨论可能的均衡状态。Huisman[2]首次出版了关于期权博弈理论的教科书,书中的模型主要是关于期权博弈理论在信息技术投资决策中的应用。Smit 和 Ankum[3]讨论了离散时间的期权博弈问题。Dias 和 Teixeira 提供了一个非常详尽的关于连续时间期权博弈理论的研究综述。Balmann 和 Mubhoff 用期权博弈理论分析了折旧和再投资对投资项目价值的影响。安瑛晖和张维[4]对期权博弈理论的产生与发展进行了综述。国内对期权博弈理论的研究仍然处于起步阶段,但已引起了许多学者的重视。

笔者采用 Dias 和 Teixeira 的分析框架,但考虑的是博弈双方不对称的情况,模型中假定一个公司已经在市场中存在,而另外一个公司正在考虑进入同一个市场。

1　模型的建立

考虑在一个行业中有 2 个公司(公司 1 和公司 2)。公司 1 已经进入的市场,每年生产 1 单位的产

收稿日期: 2004-02-23
作者简介: 赵滟,硕士研究生;安玉发,副教授,博士生导师,主要从事经济系统分析、市场与贸易等方面的研究,E-mail:anyufa@cau.edu.cn

品,并且拥有一个扩张期权,如果执行这个扩张期权,生产规模将扩大 1 倍。公司 2 还未进入市场,但拥有进入该市场的投资期权,如果执行了这个期权,将每年生产 1 单位的产品。2 家公司产品相同。每家公司在执行其实物期权的时候都要求有一个沉没成本 I。每年的利润函数可表示为

$$P_i = YD_i(m, n) \quad (i = 1, 2)$$

其中: P_i 表示利润, $D_i(m, n)$ 是利润中确定的部分。如果 $i = 1$,则 $m = 1$ 或 2, $n = 1$ 或 0;如果 $i = 2$,则 $m = 1$, $n = 1$ 或 2。另外假设存在负的外部效应,任何一个公司执行期权必定会减少另一个公司的价值,由此得到 $D_1(2,0) > D_1(1,0) > D_1(2,1) > D_1(1,1)$ 和 $D_2(1,1) > D_2(1,2)$ 。 Y 是一个随机乘子,代表需求的随机变动。假设 Y 服从几何布朗运动,即

$$\mathrm{d}Y = \alpha Y \mathrm{d}t + \sigma Y \mathrm{d}z \qquad (1)$$

其中:α 为期望利润率;σ 为期望利润率的方差。显然, P_i 也服从几何布朗运动

$$\mathrm{d}P_i = \alpha P_i \mathrm{d}t + \sigma P_i \mathrm{d}z。$$

进一步假设可复制性条件(市场中存在一个资产或一个投资组合,其价格与 P_i 完全相关)成立,所以可以用实物期权法来计算每个公司的价值;另外假设这 2 家公司都是风险中性的,故其折现率就是无风险利率 r。

在所建立的模型中将会有 2 个博弈者,公司 1 和公司 2。模型求解过程为:

1) 计算在所有可能的策略下,每一家公司的价值;

2) 根据已计算的结果,考察在这个博弈问题中是否存在均衡状态。

与标准的动态博弈问题一样,本文中求解过程也是从后往前进行的:首先计算出追随者的价值,假定领导者已经执行了它的期权;然后再计算领导者的价值,假定领导者知道追随者将根据领导者的行为选择自己的最优决策。因为,在这个的模型中 2 个博弈者的初始状态不同,即它们之间是不对称的,因此,必须考虑 2 种情形:1) 公司 1 是领导者,公司 2 是追随者;2) 公司 1 是追随者,公司 2 是领导者。

1.1 情形 1

公司 1 是领导者,公司 2 是追随者。假定领导者(公司 1) 已经执行了扩张期权,确定追随者(公司 2) 的价值。

1) 追随者的价值。

确定追随者(公司 2) 进入期权的价值。采用实物期权法,假设在市场中存在一项基础资产 Ω,价格正好为 P_2。可以这样构造动态的投资组合:持有追随者的进入期权并且卖空 n 份基础资产 Ω。现在该投资组合的价值为 $F(Y) - nP_2$,即 $F(Y) - nYD_2(0,2)$,注意到领导者已经执行了它的扩张期权,所以现在市场上有 2 单位的产品。经过一个很短的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 后,该投资组合的总收益为

$$\mathrm{d}F - nD_2(0,2)\mathrm{d}Y - n\delta YD_2(0,2)\mathrm{d}t \qquad (2)$$

用伊藤定理将 $\mathrm{d}F$ 展开得

$$\mathrm{d}F = \left(\alpha YF' + \frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 F''\right)\mathrm{d}t + \sigma YF'\mathrm{d}z \qquad (3)$$

把式(3) 和(1) 代入式(2) 中得

$$\left[\alpha YF' + \frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 F'' - \alpha YnD_2(0,2) - n\delta YD_2(0,2)\right]\mathrm{d}t + (\sigma YF' - \delta YnD_2(0,2))\mathrm{d}z$$

为消除不确定性因素的影响,必须 $n = \frac{F'}{(D_2(0,2))}$,这样该投资组合的无风险收益为 $\left(\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 F'' - \delta YF'\right)\mathrm{d}t$。在无套利机会的条件下,必定有

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 F'' - \delta YF'\right)\mathrm{d}t = r(F - YF')\mathrm{d}t$$

由此,得到了微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 F'' + (r - \delta) YF' - rF = 0 \qquad (4)$$

式(4) 的解为 $F = AY^{\beta_1} + BY^{\beta_2}$,其中 β_1 和 β_2 分别是二次方程 $\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\beta - r = 0$ 的正根和负根, A 和 B 是待定常数。注意,如果 Y 趋近于 0, F 也应当趋近于 0,所以 B 必定为 0,由此可以得到 $F = AY^{\beta_1}$。边界条件可表示为

$$F(Y_F) = \frac{Y_F D_2(1,2)}{\delta} - I \qquad (5)$$

$$F'(Y_F) = \frac{D_2(1,2)}{\delta} \qquad (6)$$

利用边界条件式(5) 和(6) ,可得到常数 A 和阈值 Y_F:

$$Y_F = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{\delta I}{D_2(1,2)}$$

$$A = \frac{Y_F^{1-\beta_1} D_2(1,2)}{\beta_1 \delta}$$

当 $Y > Y_F$ 时,追随者(公司 2) 将进入期权,每年可获得的利润为 $YD_2(1,2)$,其价值就是它的期望利

润的现值减去进入期权所产生的沉没成本 I,即 $\frac{YD_2(1,2)}{\delta}-I$,因此,在这种情况下,追随者(公司2)的价值可表示为

$$V_{2F}=\begin{cases}\frac{Y_F^{1-\beta_1}D_2(1,2)}{\beta_1\delta}Y^{\beta_1} & Y\le Y_F\\ \frac{YD_2(1,2)}{\delta}-I & Y>Y_F\end{cases}\tag{7}$$

2)领导者的价值。

如果 $Y<Y_F$,领导者(公司1)知道追随者(公司2)将不会执行进入期权,这时用与上面相同的方法求得公司1的价值。可以得到常微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2Y^2V''+(r-\delta)YV'-rV+D_1(2,0)Y=0\tag{8}$$

式(8)的通解为齐次部分的通解加1个特解,即

$$V(Y)=AY^{\beta_1}+BY^{\beta_2}+\frac{YD_1(2,0)}{\delta}$$

出于和1)中相同的原因,应有 $B=0$,因此这里仅需确定常数 A 的值,而这仅仅需要1个边界条件

$$V(Y_F)=\frac{Y_FD_1(2,1)}{\delta}\tag{9}$$

式(9)说明在点 Y_F 处,领导者的价值应当等于2个公司同时投资时所获得的价值。由式(7)可得

$$A=\frac{Y_F[D_1(2,1)-D_1(2,0)]}{Y_F^{\beta_1}\delta}$$

因为 $D_1(2,1)<D_1(2,0)$,所以 $A<0$。

如果 $Y>Y_F$,追随者(公司2)将进入市场,这时领导者的价值变成了 $\frac{YD_1(2,1)}{\delta}-I$。

综上所述,领导者(公司1)的价值可表示为

$$V_{1L}=\begin{cases}\frac{Y_F^{1-\beta_1}[D_1(2,1)-D_1(2,0)]}{\delta}Y^{\beta_1}+\frac{D_1(2,0)}{\delta}Y-I & Y\le Y_F\\ \frac{D_1(2,1)}{\delta}Y-I & Y>Y_F\end{cases}\tag{10}$$

1.2 情形2

公司1是追随者,公司2是领导者,2公司价值的计算结果如下:

$$V_{1F}=\begin{cases}\frac{Y_F'^{1-\beta_1}[D_1(2,1)-D_1(1,1)]}{\beta_1\delta}Y^{\beta_1}+\frac{D_1(1,1)}{\delta}Y & Y\le Y_F'\\ \frac{D_1(2,1)}{\delta}Y-I & Y>Y_F'\end{cases}\tag{11}$$

$$V_{2L}=\begin{cases}\frac{Y_F'^{1-\beta_1}[D_2(1,2)-D_2(1,1)]}{\delta}Y^{\beta_1}+\frac{D_2(1,1)}{\delta}Y-I & Y\le Y_F'\\ \frac{D_2(1,2)}{\delta}Y-I & Y>Y_F'\end{cases}\tag{12}$$

其中:Y_F'是在这种情况下的阈值,

$$Y_F'=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{\delta I}{D_1(2,1)-D_1(1,1)}。$$

1.3 博弈分析

假设在2个公司间信息完全对称,任何一个公司都知道竞争对手应对自己行动的最优策略。本文中事先不规定2个公司的角色,每个公司都可以自己决定成为领导者或者追随者。为了便于分析,规定该模型的各个参数值为:$\alpha=5\%$,$\sigma=20\%$,$r=10\%$,$I=20$(每个公司),$D_1(2,0)=8$,$D_1(1,0)=6$,$D_1(2,1)=3$,$D_1(1,1)=2$,$D_2(1,1)=2$,$D_2(1,2)=1.5$。根据这些参数值,可以得到 $\beta_1=1.6085$,$Y_F=1.7623$,$Y_F'=2.6434$。代入式(7)、(10)～(12)可得如下结果:

$$V_{2F}=\begin{cases}13.2118\,Y^{1.6085} & Y\le 1.7623\\ 30Y-20 & Y>1.7623\end{cases}\tag{13}$$

$$V_{1L}=\begin{cases}-70.8370\,Y^{1.6085}+160Y-20 & Y\le 1.7623\\ 60Y-20 & Y>1.7623\end{cases}\tag{14}$$

$$V_{1F}=\begin{cases}6.8821\,Y^{1.6085}+40Y & Y\le 2.6434\\ 60Y-20 & Y>2.643\end{cases}\tag{15}$$

$$V_{2L}=\begin{cases}-5.5350\,Y^{1.6085}+40Y-20 & Y\le 2.6434\\ 30Y-20 & Y>2.6434\end{cases}\tag{16}$$

本文中分析问题的逻辑非常简单:如果做领导者的价值大于做追随者的价值,公司将选择做领导者,反之亦然。根据式(13)～(16),分析计算2公司的最优策略结果见表1。

从表1可以看出,模型中至少存在2个均衡状态:当 $Y\in(0.2258,0.8852)$ 时,公司1是领导者,公司2是追随者;当 $Y\in(1.7285,2.6330)$ 时,公司

1 是追随者,公司 2 是领导者。当这 2 种情况发生时,一个公司的最优决策正好与另一公司的最优决策相适合。出于利润最大化目的,任何一个公司都不会改变它们的决策,这 2 种情况都是纳什均衡状态。

表 1　进行博弈时 2 个公司的最优策略

Table 1　Two firms' optimal strategies when considering games

公司	Y 的值域					
	$(0, 0.2258)$	$(0.2258, 0.8852)$	$(0.8852, 1.7285)$	$(1.7285, 2.6330)$	$(2.6330, 2.6434)$	$(2.6434, +\infty)$
公司 1	F	L	L	F	L	I
公司 2	F	F	L	L	L	I

注:F,L 和 I 分别表示追随者、领导者和两者无区别。

当 Y 位于区间 $(0, 0.2258)$ 时,2 个公司都愿意做追随者,直观地,这也代表一种纳什均衡状态,2 个公司都将保留各自的期权,停留在最初状态。在 2 个公司都不执行自己期权的情况下,用 V_{1I} 表示公司 1 的价值,V_{1I} 应为这时它的期望利润现值加上扩张期权的价值,公司 1 知道此时公司 2 不会进入市场与它竞争,因为存在负的外部效应,故有 $V_{1I} > V_{1F}$。用 V_{1S} 表示 2 个公司同时投资时公司 1 的价值,可以证明 $V_{1F} > V_{1S}$,因此,有 $V_{1I} > V_{1F} > V_{1S}$。对于公司 2 也可以得到一个类似的结果:$V_{2I} > V_{2F} > V_{2S}$。所以,对 2 个公司而言此时停留在最初状态就是它们的最优策略。

当 $Y > 2.6434$ 时,2 个公司对于做领导者还是追随者将采取无所谓的态度,这虽然不是一种均衡状态,但却很容易分析。每个公司都可以随意的选择自己的角色而不管对手如何决策;另外,只有当 Y 非常大的时候,同时投资对 2 个公司而言才可能是最优的决策。本例中 Y 要大于 2.6434。

当 Y 位于区间 $(0.8852, 1.7285)$ 和 $(2.6330, 2.6434)$ 时,2 个公司都希望成为领导者,这种情况较难处理。因为 2 家公司都希望作为领导者获得较高的收益,所以没有理由认为其中的一家公司会主动让对手成为领导者。在这种情况下存在 2 家公司同时投资的可能性,但它们获得的收益将比它们作为追随者时的收益还要低。在 2 个公司不能相互沟通的情况下,解决该问题惟一合适的方法是允许博弈者采用混和策略。

采用混和策略,每一家公司都将计算出它们实施期权以获得领导者的收益的可能性,与此同时也要考虑同时投资的可能性,2 个公司之间将进行一种同时的博弈(可能会有无限多轮),其中公司 i 选择投资的概率为 p_i,不投资的概率为 $1 - p_i$,$i = 1, 2$。

表 2 示出在 1 家或 2 家公司选择投资的时刻,2 公司的价值,这是一个可以重复进行无限多次的同时博弈。其中公司 1 的价值可以表示为

$$V_1 = p_1 p_2 V_{1S} + p_1 (1 - p_2) V_{1L} + (1 - p_1) p_2 V_{1F} + (1 - p_1)(1 - p_2) V_2 \quad (17)$$

表 2　采取混合策略时 2 家公司的价值

Table 2　Two firm's values allowing for mixed strategy

		公司 2	
		p_2	$1 - p_2$
公司 1	p_1	V_{1S}, V_{2S}	V_{1L}, V_{2L}
	$1 - p_1$	V_{1F}, V_{2L}	重复博弈

式(17)最后 1 项代表公司 1 在重复博弈中可获得的收益。假设在这个博弈中一定会有投资发生,重新排列(17)式可以得到

$$V_1 = \frac{p_1 p_2 V_{1S} + p_1 (1 - p_2) V_{1L} + (1 - p_1) p_2 V_{1F}}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)}$$

当 p_2 给定时,最优化 V_1 的一阶条件是 $\mathrm{d}V_1 / \mathrm{d}p_1 = 0$,经计算的二阶条件表明,这是一个最大化的问题,可以得到

$$p_2 = \frac{V_{1L} - V_{1F}}{V_{1L} - V_{1S}}$$

因为 $V_{1L} > V_{1F} > V_{1S}$,所以有 $0 < p_2 < 1$。用相同的方法可以得到

$$p_1 = \frac{V_{2L} - V_{2F}}{V_{2L} - V_{2S}}$$

因为在这 2 家公司之间存在着一些不对称性,所以 p_1 不一定等于 p_2,2 家公司在每一轮博弈中选择投资的可能性是不同的。

(下转第 96 页)

4 结束语

精细积分方法是求解线性齐次动力学方程的高精度方法。笔者将该方法与同伦摄动技术相结合提出的渐近数值方法同时具有二者的优点,既推广了精细积分方法,使其可应用于非线性动力学方程的求解,同时发展了同伦摄动技术,使其计算精度有了很大提高。数值算例结果表明,在相同的计算时间复杂度下,本文方法的计算精度高于传统的精细积分方法,从而验证了该方法的优越性。

参 考 文 献

[1] He Jihuan. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003,135:73～79

[2] He Jihuan. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems[J]. International Journal Nonlinear Mechanics, 2000,35(1):37～43

[3] Mallil E, Lahmam H, Damil N, Potier-Ferry M. An iterative process based on homotopy and perturbation techniques[J]. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 190:1845～1858

[4] Abichou H, Zahrouni H, Potier-Ferry M. Asymptotic numerical method for problems coupling several nonlinearties[J]. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191:5795～5810

[5] Elhage-Hussein A, Potier-Ferry M, Damil N. A numerical continuation method based on Padé approximants[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37:6981～7001

[6] 刘高联. 奇异摄动理论发展的新方向:人工参数法和反摄动法[A]. 见:刘宇陆. 现代数学和力学(MMM)Ⅶ[C]. 上海:上海大学出版社, 1997. 47～53

[7] 钟万勰. 暂态历程的精细积分算法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(1):1～6

(上接第91页)

2 结束语

影响公司投资决策的因素不仅有公司之间的相互作用,而且还有公司所面对的不确定性。在标准的经济学教科书中,根据寡头竞争理论认为,如果已经在市场上的企业采取一些措施并向潜在的竞争者发出强有力的不利信号,那么那些准备进入市场的企业将不得不搁置其投资计划,但从本文中的分析可知,不确定性将在一定程度上抵消已经在市场上的企业所采取的威胁性政策的有效性。因此,企业在制定投资决策的时候应把不确定性放在一个重要的位置上加以考虑。这需要用合适的方法处理不确定性因素的影响,而期权博弈理论正是分析这类问题的有力工具。

参 考 文 献

[1] Dixit A K, Pindyck R S. Investment under uncertainty[M]. Princeton (USA): Princeton University Press, 1994. 309～314

[2] Huisman K J M. Technology investment: a game theoretic real options approach[M]. Boston (USA): Kluwer Academic Pub, 2001. 259

[3] Smit H T J, Ankum L A. A real options and game-theoretic approach to corporate investment strategy under competition[J]. Financial Management, Autumn, 1993, 22(3):241～250

[4] 安瑛晖, 张维. 期权博弈理论的方法模型分析与发展[J]. 管理科学学报, 2001, 4(1):38～44

[5] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海:上海人民出版社, 1996. 207～230