中国农业大学学报 2004,9(1):54～56
Journal of China Agricultural University

一维 p-laplace 方程解的存在性

谭俊艳
(中国农业大学 理学院,北京 100083)

摘 要 利用时间-映射结合 Leray-Shauder 度的方法对一维 p-laplace 方程混合边值问题进行了研究。通过建立 Leray-Shauder 度引理,提出了一维 p-laplace 方程混合边值问题正解的存在性定理,并且证明了该定理的正确性。
关键词 p-laplace;混合边值问题;L^1-caratheodory
中图分类号 O 175.25 **文章编号** 1007-4333(2004)01-0054-03 **文献标识码** A

The existence of solutions of the one-dimensional p-laplace equation with mixed boundary value problem

Tan Junyan
(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract The Dirichlet problem of the one-dimensional p-laplace was studied extensively. Many scholars have proved the existence of the solution, the weak solution and the positive solution of the Dirichlet problem. But there is a little research about the one-dimensional p-laplace with the mixed boundary value problem. Using the method of time-mapping and Leray-Shauder degree to study the existence of solutions of the one-dimensional p-Laplace with the mixed boundary value condition was studied. From the lemma of Leray-Shauder degree the existence theory of the positive solution was put foward. The result indicated that the theory is correct.
Key words p-Laplace; time-mapping; mixing boundary value condition

近年来,一维 p-laplace 方程的 Dirichlet 问题得到了广泛的研究,并且已经取得丰富的研究成果[1～4]。Castro 和 Shivaji[1]利用相平面分析考虑了当 $p=2$ 时,一维 p-laplace 方程 Dirichlet 问题解的存在性。R. Manasevich 和 F. Zanolin[4]利用时间-映射与 Leray-Shauder 度和极大值相结合的方法得到了当 $p>1$ 时,一维 p-laplace 方程 Dirichlet 问题解的存在性及多重性。但是对于一维 p-laplace 方程混合边值问题的研究还很少。本文中对 $p>1$ 时,一维 p-laplace 方程混合边值问题正解的存在性进行了研究。

1 时间-映射

考虑一维 p-laplace 方程的混合边值问题

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + f(t,u) = 0 \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t\in(0,1)$,$f(t,u)$ 是非负函数,并且满足条件,$f:[0,1]\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 是 L^1-caratheodory 函数,$f(t,0)\equiv0$。本文中主要讨论该问题正解的存在性。

注意到

$$u'(x)=\Phi_{p'}(\Phi_p(u'(x))),\Phi_p(s)=|s|^{p-2}s$$

其中 $p'=\frac{p}{p-1}$。由于 $x\to\Phi_p(u(x))$ 是递减的(因为 $(\Phi_p(u'))'(x)=-f(t,u)\leq0$, $x\in(0,1)$),且 Φ_p 是递增的,因此 u 是递减的。这表明 u 是凹的,并且由于 $u'(0)=u(1)=0$,所以 u 在区间 $(0,1)$ 内是正的。

考虑方程

$$(\Phi_p(u'))'+f(u)=0,\ p>1$$

令 $F(S)=\int f(u)\,\mathrm{d}u$ 且定义 $c_{\#}$ 为

收稿日期:2003-06-05
作者简介:谭俊艳,硕士研究生,主要从事常微分方程的研究。

$$c_{\#}=\{f\in c^0(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)\mid \lim_{s\to+\infty}F(s)=+\infty\}$$

对任意的 $f\in c_{\#}$,定义下面的时间-映射函数

$$T_f(x)=C_P\int\frac{1}{(F(s)-F(u))^{1/p}}\mathrm{d}u$$

其中 $C_p=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p}$。

2 引　理

引理 1　令 $\hat g=\max\{k\Phi_p(s)+L,g(s)\}$, $s\in(0,+\infty)$,其中 L 是常数,且对所有的 $s\in[0,R]$,满足 $k\Phi_p(s)+L>g(s)$。令 $g^*=\lambda\hat g+(1-\lambda)g$, $\lambda\in[0,1]$,如果 R 是一个满足 $T_{g^*}(R)\neq 0$ 的正数,那么 $\deg(I-G_g,B(0,R),0)=0$。

证明:根据时间-映射定义可知

$$T_{k\phi_p}(s)=\frac{\pi_p}{k^{1/p}},\pi_p=\int^{(p-1)^{1/p}}\frac{1}{\left(1-\frac{s^p}{(p-1)^{1/p}}\right)^{1/p}}\mathrm{d}s$$

令 k 是一个正的常数且能够满足

$$T_{k\phi_p}(s)<1 \tag{2}$$

其中 $s\in(0,+\infty)$。对所有 $\lambda\in[0,1]$及 $s\in(0,+\infty)$,由引理 1 中的条件可得 $g^*(\lambda,s)\geq g(s)$,因此 $T_{g^*(\lambda,\cdot)}(s)\leq T_g(s)$。考虑方程

$$\begin{cases}(\phi_p(u'))'+\mu g^*(\lambda,u)=0\\ u'(0)=u(1)=0\end{cases}\quad \mu\in[0,1] \tag{3}$$

式(3)与算子方程 $u=G_{\mu g^*}(\lambda,u)$是等价的。其中

$$G_{\mu g^*}:[0,1]\times X\to X$$

$$X=\{x\in c^0([0,1],R),x'(0)=x(1)=0\}$$

是全连续的。那么 $\deg(I-G_{\mu g^*}(\lambda,\cdot),B(0,R),0)$一定是有意义的。否则,存在$(\lambda^*,\mu^*)\in[0,1]\times\partial B(0,R)$满足式(3),那么$|u^*|_\infty=R$, $u^*>0$。

由于 $\mu g^*\leq g^*$,所以 $T_{\mu g^*}(R)\geq T_{g^*}(R)$。这样 $0=T_{\mu g^*}(R)\geq T_{g^*}(R)$,与 $T_{g^*}(R)>0$ 矛盾。当 $\mu=1$ 时 $\mu g^*=g^*$,所以 $\deg(I-G_{\mu g^*}(\lambda,\cdot),B(0,R),0)$是有意义的。由 Leray-Shauder 度的同伦不变性,式(4)成立

$$\deg(I-G_g(\lambda,\cdot),B(0,R),0)=\deg(I-G_{g^*}(1,\cdot),B(0,R),0) \tag{4}$$

这表明 $\deg(I-G_g,B(0,R),0)$存在。如果能够证明式(4)的右端等于 0,那么就得到了引理的结论。

假设右端不等于 0,则存在函数 u,满足 $0<u(t)<R$。令 $\hat g=k\Phi_p(u(t))+L$,则 u 满足

$$\begin{cases}(\phi_p(u'))'+\hat g(u)=0\\ u'(0)=u(1)=0 & u>0\\ \max u(t)<R\end{cases} \tag{5}$$

$T_{\hat g}(u_{\min})=1$,但是 $T=T_{\hat g}(u_{\min})<T_{k\phi_p}(u_{\min})<1$,这与式(2)是矛盾的。引理证毕。

3　定理及证明

定理 1　假设:

1) $\liminf\limits_{s\to 0^+}\frac{f(t,s)}{\phi_p(s)}\geq-\alpha(t)$对所有 $t\in[0,1]$一致成立,其中 $\alpha\in L^1((0,1),\mathbf{R}^+)$。

2) $\limsup\limits_{s\to 0^+}\frac{f(t,s)}{\phi_p(s)}\leq k_0(t)$对所有 $t\in[0,1]$一致成立,其中 $k_0\in L^\infty((0,1),\mathbf{R}^+)$,且 $\lambda_1(p,k_0)>1$。定义 $\lambda_1(p,k_0)$为使方程$(\phi_p(u'))'+\lambda k(t)\phi_p(u)=0$, $u'(0)=u(1)=0$ 有非零解的特征值。

3) 存在函数 $g\in c_{\#}$ 和 $d_0>0$,对几乎所有的 $t\in[0,1]$和 $s\geq d_0$ 有 $0\leq f(t,s)\leq g(s)$,其中 s 满足$\liminf\limits_{s\to\infty}(T_g(s)>0$。则方程(1)至少存在 1 个解 $\hat u(\cdot)$满足 $\hat u(t)>0$, $t\in[0,1]$。

证明:假设在空间 c^0 中有 2 个开球 $B(0,r)$与 $B(0,R)$, $0<r<R$,使得式(1)在$\partial B(0,r)\cup\partial B(0,R)$没有解,而且

$$\deg_{LS}(I-G_f,B(0,r),0)=1\quad r>0 \tag{6}$$

r 足够小,和

$$\deg_{LS}(I-G_f,B(0,R),0)=0\quad R>0 \tag{7}$$

R 足够大。式(6)和(7)表明算子 G_f 至少有 1 个不动点 $u\in B(0,R)\setminus B(0,r)$。因此 u 是式(1)的非平凡解。要证明定理 1,只要证明式(6)与(7)成立即可。

考虑依赖参数的方程

$$\begin{cases}(\phi_p(u'))'+\lambda f(t,u)=0\\ u'(0)=u(1)=0\end{cases}\quad\lambda\in[0,1] \tag{8}$$

对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_\varepsilon>0$,使得

$$f(t,s)\leq(k_0(t)+\varepsilon)\phi_p(s) \tag{9}$$

对几乎所有 $t\in(0,1)$和 $0\leq s\leq\delta_\varepsilon$ 成立,且

$$\lambda_1(p,k_0)>1\quad(k_0\in L^\infty) \tag{10}$$

因此一定存在 $r_0>0$,使得 $\deg_{LS}(I-G_f,B(0,r),0))$对 $0\leq r\leq r_0$ 和 $\lambda\in[0,1]$是有意义的。

反证。假设存在 $\lambda_n\in[0,1]$和(8)$_{\lambda n}$的解 $u_n(\cdot)$,使得当 $r_n\to 0$ 时$|u_n|_\infty=r_n$,取式(9)中的 $\varepsilon=\varepsilon_n$ 使得$\varepsilon_n\to 0$。对每一个 $n\in N$, $\delta_n=\delta_{\varepsilon_n}$,由于 $r_n\to 0$,可

假设 $r_n < \delta_n$。因为对所有 $t \in [0,1]$, $u_n(t) \geq 0$,因此 $\max u_n(\cdot) = r_n < \delta_n$。因为 $u_n(\cdot) \geq 0$ 且满足下式

$$(\phi_p(u_n'))' + \lambda_n f(t, u_n) = 0$$

通过式(9)可得 $-(\phi_p(u_n'))' \leq \lambda_n(k_0(t) + \varepsilon_n)\phi_p(u_n)$。两边同乘 $u_n(t)$ 且在 $[0,1]$ 积分,可得

$$\int (\phi_p(u_n'))u_n' \leq \lambda_n \int (k_0(t) + \varepsilon_n)\phi_p(u_n) \cdot u_n$$

令 $v_n = \frac{u_n(t)}{|u_n|_\infty}$,则

$$\int |v_n'(t)|^p \leq \lambda_n \int (k_0(t) + \varepsilon_n)|v_n(t)|^p \tag{11}$$

由于 $|v_n|_\infty = 1$,由式(11)可知,存在 $c > 0$,使得

$$\int |v_n'(t)|^p \mathrm{d}t \leq c,\ n \in N$$

由 Ascoli-Arzela 定理, $\{v_n\}$ 存在收敛子列,仍把它记作 $\{v_n\}$。假设在区间 $[0,1]$ 中 $v_n \to v^*$,对任意 $t \in [0,1]$ 都有 $v^*(t) \geq 0$。并且 $v^{*\prime}(0) = v^*(1) = 0$, $\max v^* = 1$ 且 $\lambda_n \to \lambda^* \in [0,1]$。

因为

$$\lambda_1(p, k_0) \int k_0(t)|v_n(t)|^p \mathrm{d}t = \lambda_n \int |v_n'(t)|^p \mathrm{d}t$$

由式(11)可得

$$\lambda_1(p, k_0) \int k_0(t)|v_n(t)|^p \mathrm{d}t \leq$$

$$\lambda_n \int k_0(t)|v_n(t)|^p + \varepsilon_n \int |v_n(t)|^p \mathrm{d}t$$

两边取极限可得

$$\lambda_1(p, k_0) \int k_0(t)|v_n^*(t)|^p \mathrm{d}t \leq$$

$$\lambda_n \int k_0(t)|v_n^*(t)|^p \mathrm{d}t$$

即

$$(\lambda_1(p, k_0) - \lambda^*) \int k_0(t)|v_n^*(t)|^p \mathrm{d}t \leq 0 \tag{12}$$

由于对几乎所有 $t \in (0,1)$, $k_0(t) \geq 0$ 且 $|v^*|_\infty = 1$,由式(12)可知 $\lambda_1(p, k_0) \leq \lambda^* \leq 1$,这与 $\lambda_1(p, k_0) \geq 1$ 矛盾。因此对足够小的 $r > 0$ 与 $\lambda \in [0,1]$, $\deg(I - G_{\lambda f}, B(0, r), 0)$ 是有意义的。由拓扑度的同伦不变性。$\deg(I - G_f, B(0, r), 0) = \deg(I, B(0, r), 0) = 1$。式(6)证毕。

考虑边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + f(t, u, \lambda) = 0 \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad \lambda \in [0,1] \tag{13}$$

其中

$$f(t, s, \lambda) = (1 - \lambda)\hat{g}(s) + \lambda f(t, s)$$

且 $\hat{g}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 满足 $\hat{g}(s) = g(s)$ $(s \geq d_0)$ 是1个全连续映射。式(13)与算子方程 $u = G_{\tilde{f}}(\lambda, u)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ 等价,其中 $G_{\tilde{f}}: [0,1] \times c^0 \to c^0$ 为全连续算子。由引理1知

$$\deg(I - G_{\tilde{f}}(0, \cdot), B(0, R), 0) =$$

$$\deg(I - G_{\hat{g}}(0, \cdot), B(0, R), 0) = 0 \tag{14}$$

其中 R 足够大。由式(5)可得:存在 $\varepsilon_1 > 0$,及数列 $\{R_n\}$, $R_n \to \infty$ 满足

$$T_{\hat{g}}(R_n) \geq \varepsilon_1 \tag{15}$$

当 n 足够大时 $u_{\max} \neq R_n$,否则,存在 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$,使得 $T_{\tilde{f}}(R_n) = 0$, $0 = T_{\tilde{f}}(R_n) \geq T_{\hat{g}}(R_n)$ 这与式(15)矛盾。因此,当 n 足够大时, $u \neq G_{\tilde{f}}(\lambda, u)$,其中 $\lambda \in [0,1]$ 及 $u \in \partial B(0, R_n)$。故 $\deg_{LS}(I - G_{\tilde{f}}(\lambda, \cdot), B(0, R_n), 0)$ 对于 $\lambda \in [0,1]$ 是有意义的。由拓扑度的紧同伦不变性与式(14), $\deg_{LS}(I - G_{\tilde{f}}(1, \cdot), B(0, R_n), 0) = 0$ 及 $\tilde{f}(1, \cdot) = f$,式(7)得证。

定理证毕。

当函数 f 是奇异的时候,一维 p-laplace 方程混合边值问题有待于进一步研究。

参 考 文 献

[1] Castro A, Shivaji R. Multiple solutions for a dirichlet problem with jumping onlinearities[J]. Math Anal Appl, 1998, 133: 509～528

[2] Njokv F I, Zlanolin F. Positive solutions for two point bvp's existence and multiplicity results[J]. Nonlinear Analysis, 1998, 13(11): 1329～1338

[3] UBILIA P. Multiplicity results for the 1-dimensional generalized P-Laplacian[J]. Math Anal Appl, 1995, 190: 611～623

[4] Manasevich R, Zanolin F. Time-mappings and Multiplicity of solutions for the one-dimensional P-Laplacian[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Method & Applications, 1993, 21(4): 69～91