

三次曲线牛顿分类法的研究

吴红丹

(中国农业大学计算机网络中心)

摘要 应用三次曲线的配极理论及其基本性质, 讨论了三次曲线牛顿分类的依据, 确定了牛顿分类中 4 种形式和 7 类曲线所对应的坐标系。

关键词 三次曲线; 牛顿分类; 配极理论; 坐标系

分类号 O 185.1

The Coordinate Systems for Standard Equations of Cubic Curves Newton's Classification

Wu Hongdan

(Computer and Network Center, CAU)

Abstract Using the theories of polarity and the properties of cubic curves on Newton's classification. The relationships of the standard equations with the coordinate system, and also, every kind of cubic curves' standard equations were developed.

Key words cubic curves; Newton's classification; theories of polarity; coordinate system

随着计算机图形学的发展, 高阶代数曲线理论, 尤其是平面代数曲线理论, 正日益受到人们的重视。著名科学家牛顿在 1704 年发表的论文中, 对三次曲线进行了分类, 牛顿分类对研究三次曲线的投影和作图有重要的意义; 但是, 我国目前尚未见有关三次曲线的著作, 这方面的论文及参考文献亦极少。笔者在这方面进行了一些探索, 所做分析主要以三次曲线的配极理论和射影变换理论为依据。

1 三次曲线牛顿分类的依据

平面上三次曲线在任意坐标系 σ 中的方程可表示为

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Iy + K = 0 \quad (1)$$

由文献[1]知, 牛顿分类法将三次曲线分成 A, B, C, D 4 种形式(form), 7 类(class), 14 种(kind), 见表 1。文献[2]中指出, 任一曲线通过一个初等变换, 就可变换成 4 个标准形式中的一个, 但是该文献中并未作进一步的详细说明。

从射影的观点看, 牛顿分类属于仿射分类的范畴, 因此对牛顿分类各形式的分析应从分析非固有直线与三次曲线的相交入手。设 k_3 为任意一条三次曲线, u 为非固有直线, 则在扩充坐标系中 u 和 k_3 的方程分别为

收稿日期: 2000-03-09

吴红丹, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)53 信箱, 100083

陈谷新, 射影变换 北京: 北京农业机械化学院, 1981. 15~ 18

表1 三次曲线牛顿分类

形式	标准方程	类别	曲线名称	种别	条件	备注	
A	$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$	I	双曲双曲线	I-1	$e = 0$	无轴	
				I-2	$e = 0, b \neq 0, b^2 \neq 4ac$	单轴	
				I-3	$e = 0, b \neq 0, b^2 = 4ac$	三轴	
				I-4	$b = 0$	三渐近线共点	
		II	残缺双曲线	II-1	$a < 0$	$e = 0$	无轴
		II-2	$e = 0$	单轴			
		III	抛物双曲线	III-1	$a = 0, b \neq 0$	$e = 0$	无轴
		III-2	$e = 0$	单轴			
		IV	双曲化圆锥曲线	IV-1	$a = 0, b = 0$	$c < 0$	双曲化椭圆
		IV-2	$c > 0$	双曲化双曲线			
		IV-3	$c = 0$	双曲化抛物线			
		B	$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$	V	三叉戟曲线		
C	$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$	VI	发散抛物线				
D	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	VII	立方抛物线				

$$x_3 = 0 \quad (2)$$

$$Ax_1^3 + 3Bx_1^2x_2 + 3Cx_1x_2^2 + Dx_2^3 + 3Ex_1^2x_3 + 6Fx_1x_2x_3 + 3Gx_2^2x_3 + 3Hx_1x_3^2 + 3Ix_2x_3^2 + Kx_3^3 = 0 \quad (3)$$

由式(2)和(3)求交得

$$Ax_1^3 + 3Bx_1^2x_2 + 3Cx_1x_2^2 + Dx_2^3 = 0$$

设 $y = x_1/x_2$, 则

$$Ay^3 + 3By^2 + 3Cy + D = 0$$

此方程决定非固有点有以下几种情况。

- 1) 3个实交点。
- 2) 1个实交点和1个二重点, 此时分2种情况: a. 直线 u 为 k_3 的切线; b. 直线 u 过 k_3 的二重点(尖点、孤点、结点)。
- 3) 1个实交点, 2个虚交点。
- 4) 1个三重根, 直线与 k_3 二阶相切, 此时分3种情况: a. 切点为结点; b. 切点为尖点; c. 切点为拐点。

下面对牛顿分类各形式与非固有直线的相交情况进行分析。首先分析形式A 曲线与直线 u 的相交情况。

将形式A 曲线齐次化, 得

$$x_1x_2^2 + ex_2x_3^2 = ax_1^3 + bx_1^2x_3 + cx_1x_3^2 + dx_3^3, \quad (4)$$

式(4)和(2)相交得 $x_3 = 0$ 或 $(x_2/x_1)^2 = a$, 故有3种情况:

- 1) $a > 0$ 时, 有3个不同实交点, 分别为 $(0, 1, 0)$, $(1, a^{1/2}, 0)$ 和 $(1, -a^{1/2}, 0)$;
- 2) $a = 0$ 时, 有2个不同实交点, 分别为 $(0, 1, 0)$ 和 $(1, 0, 0)$, 其中1个为二重点;
- 3) $a < 0$ 时, 有1个实交点 $(0, 1, 0)$ 和2个虚交点 $(1, a^{1/2}i, 0)$, $(1, -a^{1/2}i, 0)$ 。

其次, 分析形式B, C, D 曲线与直线 u 的相交情况。其交点均为1个三重根: $(0, 1, 0)$ 。

以上分析表明, 牛顿分类的 4 种形式与 u 相交的结果与式(2)和(3)相交的情形完全吻合。由此可知: 牛顿的分类是以非固有直线与三次曲线交点的几何性质为基本依据的。

2 三次曲线的标准形式与坐标系

设曲线 k_3 在已知坐标系 σ 中的方程如式(1), 现找一新坐标系 σ_1 , 使曲线 k_3 在 σ_1 中的方程为标准形式。

2.1 形式 A 曲线的坐标系

2.1.1 双曲双曲线

此类曲线交直线 u 于 3 个单根, 具有 3 条实渐近线, 渐近线是曲线上非固有点的切线。标准式为

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a > 0 \quad (I)$$

(I) 式中 x^3 项的系数 a 是由 u 交 k_3 于 3 个交点决定的, 交点中可能有拐点。此类曲线又可分为 4 种。

1) I-1 无轴双曲双曲线

设 u 交 k_3 的 3 个点分别为 M, N, T , 曲线的 3 条实渐近线为 m, n, t , 3 线交点 S, V, W (图 1), 以 SV 中点 O 为原点, OW 为 x , m 为 y 轴, OS, OV, OW 是单位线段, 构成一仿射坐标系 σ_1 。可以证明 k_3 在 σ_1 坐标系中的方程为标准式 (I)。

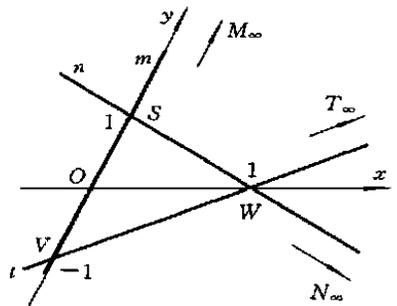


图 1 双曲双曲线(无轴, 单轴, 三轴)坐标系

证明 在 σ_1 系中, 点及线的坐标分别为: $M(0, 1, 0), N(1, -1, 0), T(1, 1, 0), S(0, 1, 1), V(0, -1, 1), W(1, 0, 1), m(1, 0, 0), n(1, 1, -1), t(1, -1, -1)$ 。

由射影几何可知, 任意点 $A_1(x_1, x_2, x_3)$ 关于 k_3 的一次配极方程为

$$Px_1 + Qx_2 + Rx_3 = 0 \quad (5)$$

其中: $P = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 + 2Ex_1x_3 + 2Fx_2x_3 + Hx_3^2$

$$Q = Bx_1^2 + 2Cx_1x_2 + Dx_2^2 + 2Fx_1x_3 + 2Gx_2x_3 + Ix_3^2$$

$$R = Ex_1^2 + 2Fx_1x_2 + Gx_2^2 + 2Hx_1x_3 + 2Ix_2x_3 + Kx_3^2$$

由此得点 M 的切线为

$$Cx_1 + Dx_2 + Gx_3 = 0 \quad (6)$$

又因点 M 的切线在 σ_1 系中为 y 轴, 故其方程为

$$x_1 = 0 \quad (7)$$

比较式(6)和(7), 可知 $D = 0, G = 0$ 。

又知点 N 和 T 在曲线 k_3 上, 所以, 将点的坐标代入式(3)可得 $A + 3B + 3C = 0$ 和 $A - 3B + 3C = 0$, 解得 $B = 0, A = -3C$ 。

另外, 点 N 的一次配极与直线 $n(1, 1, -1)$ 为同一直线, 其方程分别为

$$-2Cx_1 - 2Cx_2 + (E - 2F)x_3 = 0 \quad (8)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad (9)$$

比较式(8)和(9)得

$$-2C/1 = -2C/1 = (E-2F)/(-1) \quad (10)$$

同理,由 T 处的配极和切线可得

$$-2Cx_1 + 2Cx_2 + (E+2F)x_3 = 0 \quad (11)$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad (12)$$

比较式(11)和(12)得

$$-2C/1 = 2C/-1 = (E+2F)/(-1) \quad (13)$$

由式(10)和(13)解得 $F=0$ 。

由以上分析可知,曲线 k_3 在 σ_1 系中的方程中有 $B=D=G=F=0$,故式(1)变成

$$Ax^3 + 3Cxy^2 + 3Ex^2 + 3Hx + k = 0 \quad (14)$$

将方程中各符号与牛顿公式中各符号统一,即与牛顿的标准式一致。所以,曲线 k_3 在仿射坐标系 σ_1 中的方程为牛顿分类的典式。但是,这一结果尚未满足牛顿分类的要求,因为牛顿分类采用的是直角坐标系。为了满足牛顿分类的要求,必须再进行一次仿射变换(图形变换),将仿射坐标系 σ_1 变换成直角坐标系。这个变换不改变曲线的方程,而将原坐标系的图形变成新图形,二者图形不同。

2) I-2 单轴双曲双曲线

此种曲线与 u 的交点也是3个实点,与上述曲线不同的是其中一个为拐点。其标准式为 $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 。证明方法同上,尚需证明的是 $e=0$ 。

证明 由文献[2]知,拐点满足海森(Hessian)曲线 H 。若曲线以齐次方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 表示,对 f 的二次偏导用 $f_{x_1x_1}, f_{x_1x_2}, f_{x_1x_3}, f_{x_2x_1}, \dots, f_{x_3x_3}$ 则

$$H = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_2x_1} & f_{x_3x_1} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} & f_{x_3x_2} \\ f_{x_1x_3} & f_{x_2x_3} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

计算曲线在拐点 $M(0, 1, 0)$ 处的二次偏导可得: $f_{x_1x_1} = -6ax_1 - 2bx_3 = 0$; $f_{x_2x_2} = 2x_1 = 0$; $f_{x_3x_3} = 2ex_2 - 2cx_1 - 6dx_3 = 2e$; $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = 2x_2 = 2$; $f_{x_2x_3} = f_{x_3x_2} = 2ex_3 = 0$; $f_{x_1x_3} = f_{x_3x_1} = -2bx_1 - 2cx_3 = 0$;代入式(15)得 $e=0$,证毕。

3) I-3 三轴双曲双曲线

此种曲线交非固有直线 u 于3个拐点 M, N, T ,其标准式和坐标系与I-2无异,证明方法同上。

4) I-4 三渐近线共点的双曲双曲线

此种曲线与直线 u 相交也是3个拐点 M, N, T ,但3条渐近线 m, n, t 交于一点 O 。建立一仿射坐标系 σ_2 (图2):以 O 为原点,任作平行于 m 的直线 l ,交 n, t 于点 S 和 V ,设 SV 的中点为 W ,以 OW 为 x 轴,以渐近线 m 为 y 轴, OW, OS, OV 为单位线段。可以证明,曲线 k_3 在该坐标系中的方程为标准式 $xy^2 + ey = ax^3 + cx + d$ 。

证明 由于 m 为 y 轴,式(1)中 $D=G=0$;由文献[3]可知渐近线 m, n, t 共点于 O ,即牛顿中心。当新坐标以 O 为原点时, k_3 中的二次项消失,即式(1)中的 $E=F=G=0$ 。又由点 $N(1, 1, 0), T(1, -1, 0)$ 可得 $A-3B+3C=0$ 和 $A+3B+3C=0$,故 $B=0$ 。所以,曲线在坐标系 σ_2

中的方程为 $Ax^3 + 3Cxy^2 + 3Hx + 3Iy + K = 0$ 。将此式符号适当改变, 即与牛顿标准式一致。

2.1.2 残缺双曲线

此类曲线 k_3 交直线 u 于 1 个实根 M 和 2 个共轭虚根。标准式为

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a < 0 \quad (II)$$

式(II)与(I)完全相同, 只是系数 a 的符号不同。根据 M 是一般点或拐点, 这类曲线又分成 2 种: 无轴的和单轴的残缺双曲线。由于这类曲线与第 V 类曲线(三叉戟, 其标准式为: $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$)较特殊, 将另文讨论, 此处从略。

2.1.3 抛物双曲线

此类曲线 k_3 交直线 u 于 1 个单根 M , 1 个重根 N (u 与 k_3 相切), 具有 2 条实渐近线(m 和非固有直线 u), 标准式为

$$xy^2 + ey = bx^2 + cx + d \quad (III)$$

根据点 M 是一般点或拐点, 此类曲线分无轴的抛物双曲线($e = 0$)和单轴的抛物双曲线($e \neq 0$)2 种。若在直线 m 上取一适当点为原点 O , 以 m 为 y 轴, ON 为 x 轴, 建立一仿射坐标系 σ_3 (图 3), 则曲线在 σ_3 系中的方程为标准式(III)。

证明 首先在 y 轴上任取一点 O 为原点, 由于 m 为 y 轴, 一般式中的系数 D 和 G 为 0。点 $N(1, 0, 0)$ 的一次配极为 $Ax_1 + Bx_2 + Ex_3 = 0$, 而在 σ_3 系 N 的一次配极即非固有直线 u 为 $x_3 = 0$, 比较 2 式得 $A = 0, B = 0$ 。于是 k_3 在 σ_3 系方程为 $3Cxy^2 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Hx + 3Iy + k = 0$ 。再做 1 次平移: $x = x, y = y + F/C$, 即可消去 xy 项, 所得方程即为牛顿标准式(III)。

2.1.4 双曲化圆锥曲线

此类曲线 k_3 交非固有直线 u 于 1 个单根 T , 1 个重根 $M(N)$, 有 3 条渐近线 m, n, t , 它与第 III 类曲线不同的是 u 过曲线 k_3 的二重点, 标准式为

$$xy^2 + ey = cx + d \quad (IV)$$

根据二重点情况, 此类曲线又分 3 种。由于渐近线 m, n 均过同一非固有点 $M(N)$, 所以 $m \parallel n$ 。设 t 为 y 轴, m, n 之等距线为 x 轴, 建立坐标系 σ_4 (图 4), 则曲线方程如标准式 IV。

证明 由于 t 为 y 轴, 故 k_3 式中 D 和 G 为 0。又由于点 $M(1, 0, 0)$ 在曲线上, 得 $A = 0$ 。又, 点 M 关于曲线 k_3 的二次配极为

$$3Ax_1^2 + 6Bx_2x_1 + 3Cx_2^2 + 6Ex_1x_3 + 6Fx_2x_3 + 3Hx_3^2 = 0 \quad (16)$$

另一方面, 由切线 m, n 可得方程

$$x^2 - L^2x_3 = 0 \quad (17)$$

比较式(16)和(17)得: A, B, E, F 均为 0。故式(1)为 $Cxy^2 + 3Hx + 3Iy + K = 0$ 。写成牛顿公式中的符号得标准式(IV)。证毕。

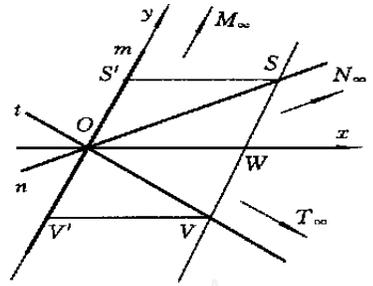


图 2 渐近线共点双曲线坐标系

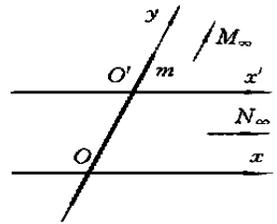


图 3 抛物双曲线坐标系

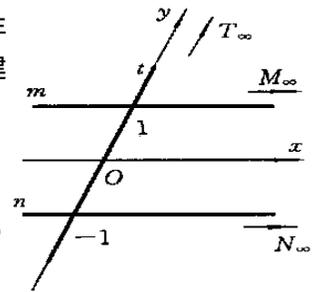


图 4 双曲化圆锥曲线坐标系

2.2 形式C曲线的坐标系位置

形式C曲线只有1类: 发散抛物线(第VI类, 图5)。非固有直线 u 切此类曲线 k_3 于拐点 M , 渐近线只有1条即非固有直线 u_0 。由于拐点处的二次配极分解为1条切线和1条拐点的调和极线(伴线)^[4], 设拐点 M 为 y 轴的非固有点, 以拐点的调和极线为 x 轴, 建立坐标系 σ_5 , 则曲线 k_3 的标准式为

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{VI})$$

证明 由拐点 $M(0, 1, 0)$ 的一次配极得切线 $Cx_1 + Dx_2 + Gx_3 = 0$, 而在 σ_5 系 M 的一次配极, 即非固有直线 u 为 $x_3 = 0$, 比较2式得 $C = 0$ 和 $D = 0$ 。拐点的二次配极 $3Bx_1^2 + 6Fx_1x_3 + 6Gx_2x_3 + 3Ix_3^2 = 0$, 在该坐标系中分解为 x 轴和非固有直线 u , 即 $x_2x_3 = 0$ 。比较2式得 B, F, I 均为0。写成牛顿公式中的符号得标准式 $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 。

2.3 形式D曲线的坐标系位置

形式D曲线也只有1类: 立方抛物线(第VII类, 图6)。非固有直线 u 切 k_3 于其尖点 M , 只有1条渐近线 u_0 。设尖点 M 为 y 轴的非固有点, 任意垂直 y 轴的直线为 x 轴, 建立坐标系 σ_6 , 则曲线 k_3 的标准式为

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{VII})$$

证明 尖点 $M(0, 1, 0)$ 的一次配极得尖点切线 $Cx_1 + Dx_2 + Gx_3 = 0$, 而在 σ_6 系中 M 的一次配极即非固有直线 u 为 $x_3 = 0$, 比较2式得 $C = 0, D = 0$ 。尖点的二次配极 $3Bx_1^2 + 6Fx_1x_3 + 6Gx_2x_3 + 3Ix_3^2 = 0$, 分解为2条重合的切线, 在该坐标系中为 $x_3^2 = 0$ 。比较2式得 B, F, G 均为0。牛顿标准式为 $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 。

3 结束语

笔者对平面三次曲线牛顿分类进行了系统的研究, 确定了将曲线的一般方程变换成牛顿标准式的变换方法和坐标系位置, 为进一步研究三、四次代数曲线分类、投影和实际应用提供了良好的条件。分析表明: 牛顿的分类法属于仿射分类范畴, 但牛顿所提供的插图中, 却全部是直角坐标系, 从现代的分类观点来看, 是值得讨论的。

参 考 文 献

- 1 克莱茵M. 古今数学思想(二). 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海: 上海科技出版社, 1979. 292~ 294
- 2 方德植, 陈奕培. 射影几何. 北京: 高等教育出版社, 1955. 299~ 300
- 3 吴红丹. 三次曲线牛顿分类的研究. [学位论文]. 北京: 北京农业工程大学, 1993
- 4 陈谷新. 三次曲线射影分类的研究(二). 北京农业工程大学学报, 1993, 13(4): 17~ 19

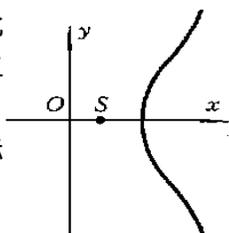


图5 发散抛物线坐标系

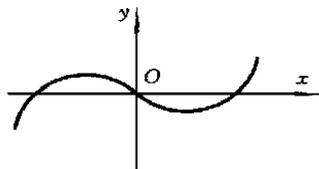


图6 立方抛物线坐标系