中国农业大学学报 2000, 5(2): 63～67
Journal of China Agricultural University

电力网规划模型的线性化理论与方法

许 跃 进①
(中国农业大学电子电力工程学院)

摘 要 应用数学优化中的库恩-塔克理论, 论证了电力网线性规化模型的合理性, 证明线性化后的规划模型与原始的非线性规划模型具有完全相同的最优解, 为建立及求解电力网的线性规划模型提供了数学依据。

关键词 电力网规划; 最优化; 线性化

分类号 TM 715

Linearization Theory and Method of Power Network Planning Model

Xu Yuejin
(College of Electronic and Electric Power Engineering, CAU)

Abstract The nonlinear characteristics of power network planning model is pointed out, the mathematical method and process of linearizing the original planning model is given. Applying Kuhn-Tucker theory of mathemitical optimization. It has been proved that the optimal solution of the linearized planning model is completely the same as the original planning model. The mathematical basis for establishing and solving power network linear planning model has been set up.

Key words power network planning; optimization; linearization

电力网规划是一个复杂问题, 国内外许多学者, 应用各种方法进行了深入研究[1～4]。数学规划方法是应用最为广泛的方法之一。为简单计算, 一般采用线性模型, 建立线性模型的主要依据是经济电流密度这一物理概念, 但单条线路的精确费用实际为非线性函数, 即

$$w(S, P) = c + v_1 S + \frac{v_2}{S} P^2 \tag{1}$$

式中: S 为导线截面; P 为导线传输功率; c, v_1, v_2 为费用常数。电力网规划模型的目标函数应与式(1)相对应才更加符合实际, 这样使得规划模型成为非线性规划模型, 并因此提出一个问题: 如何对该非线性模型实施线性化, 线性化后规划模型的解与原模型的解是否相同。本文从理论上回答了这个问题。

1 规划问题的数学抽象

数学规划中有约束极值问题一般表示为下面的形式[5]:

收稿日期: 1999-07-07

①许跃进, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 62 信箱, 100083

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}\min f(x) \\ h_i(x)=0 \quad i=1,2,\cdots,m & (2)\\ g_j(x)\le 0 \quad j=1,2,\cdots,l & (3)\end{cases}
$$

根据库恩–塔克(K–T)理论, 若 $f(x)$, $h_i(x)$ 和 $g_j(x)$ 在欧氏空间的某一开集上一阶连续可微, 向量 x^* 是问题(Ⅰ)的局部(或全局)最小点, 而且 x^* 为上述约束的正则点, 则存在向量 $\Gamma^*=(\gamma_1^*,\gamma_2^*,\cdots,\gamma_m^*)$ 和 $B^*=(\beta_1^*,\beta_2^*,\cdots,\beta_l^*)$, 使

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i^*\nabla h_i(x^*)+\sum_{j=1}^{l}\beta_j^*\nabla g_j(x^*)=\mathbf{0}\\
&\beta_j^* g_j(x^*)=0 \qquad j=1,2,\cdots,l\\
&\beta_j^*\ge 0 \qquad j=1,2,\cdots,l
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

称式(2)～(4)为 K–T 条件, 满足式(2)～(4)的 x 点为 K–T 点。上述条件说明, 问题(Ⅰ)的极值点必为 K–T 点。

2 精确计及导线费用后的电力网络规划模型

令 $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$, $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)^{\mathrm{T}}$, $S=(S_1,S_2,\cdots,S_n)^{\mathrm{T}}$, 其中 Λ 为 0–1 支路决策变量, 则考虑线路实际费用函数式(1)后的电力网络非线性规划模型一般可表示为

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}\min G=f(\Lambda,P,S)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(c_k\lambda_k+v_{1k}S_k+\frac{v_{2k}}{S_k}P_k^2\Big) & (5)\\ h_i(P)=0 \qquad i=1,2,\cdots,m & (6)\\ g_j(\Lambda,P)\le 0 \qquad j=1,2,\cdots,l & (7)\end{cases}
$$

式(6)为线性等式约束, 主要包括节点功率平衡条件; 式(7)为线性不等式约束, 主要包括功率上限限制条件[3]。

规划问题(Ⅱ)的 K–T 条件是

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix}\nabla_\Lambda f\\ \nabla_P f\\ \nabla_S f\end{pmatrix}+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \nabla_P h_i\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{l}\beta_j\begin{pmatrix}\nabla_\Lambda g_j\\ \nabla_P g_j\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}=\mathbf{0} & (8)\\
\beta_j g_j=0 \qquad j=1,2,\cdots,l & (9)\\
\beta_j\ge 0 \qquad j=1,2,\cdots,l & (10)
\end{cases}
$$

这里

$$
\nabla_\Lambda f=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial\lambda_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial\lambda_n}\end{pmatrix},\quad
\nabla_P f=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial P_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial P_n}\end{pmatrix},\quad
\nabla_S f=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial S_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial S_n}\end{pmatrix}
$$

$$
\nabla_P h_i=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h_i}{\partial P_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial h_i}{\partial P_n}\end{pmatrix},\quad
\nabla_\Lambda g_j=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_j}{\partial\lambda_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial g_j}{\partial\lambda_n}\end{pmatrix},\quad
\nabla_P g_j=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_j}{\partial P_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial g_j}{\partial P_n}\end{pmatrix}
$$

将式(8)整理得

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_{\Lambda} f+\sum_{j=1}^{l} \beta_j \nabla_{\Lambda} g_j=\mathbf{0}\\&\nabla_{P} f+\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \nabla_{P} h_i+\sum_{j=1}^{l} \beta_j \nabla_{P} g_j=\mathbf{0}\\&\nabla_{S} f=\mathbf{0}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

规划问题(Ⅱ)的 K－T 条件又为式(9)～(11)。

3　规划问题(Ⅱ)的演变规划模型

令

$$S=\Psi(\Lambda, P) \tag{12}$$

使其满足关系

$$\nabla_{S} f=\mathbf{0} \tag{13}$$

这里, $\Psi(\Lambda, P)$ 是向量值函数, 即

$$\Psi(\Lambda, P)=\begin{pmatrix}\Psi_1(\Lambda, P)\\ \vdots \\ \Psi_n(\Lambda, P)\end{pmatrix}$$

为求解规划问题(Ⅱ), 利用式(12)建立规划模型(III), 即

$$(\mathrm{III})\begin{cases}\min G=T(\Lambda, P)=f(\Lambda, P, S)=f(\Lambda, P, \Psi(\Lambda, P))\\ h_i(P)=0 \qquad i=1,2,\cdots,m\\ g_j(\Lambda, P)\leq 0 \qquad j=1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{14}$$

4　规划问题(Ⅱ)与(III)同解的论证

假定 Λ 为连续变量, 设 $\begin{pmatrix}\Lambda^*\\ P^*\end{pmatrix}$ 是规划问题(III)的 K－T 点, 令 $S^*=\Psi(\Lambda^*, P^*)$, 证明 $\begin{pmatrix}\Lambda^*\\ P^*\\ S^*\end{pmatrix}$ 是规划问题(Ⅱ)的 K－T 点。

证明　因为 $\begin{pmatrix}\Lambda^*\\ P^*\end{pmatrix}$ 是规划问题(III)的 K－T 点, 由 K－T 条件可知, 存在 $\Gamma^*=(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \cdots, \gamma_m^*)$ 和 $B^*=(\beta_1^*, \beta_2^*, \cdots, \beta_l^*)$, 满足

$$\begin{cases}\nabla_{\Lambda} T(\Lambda^*, P^*)+\displaystyle\sum_{j=1}^{l} \beta_j^* \nabla_{\Lambda} g_j(\Lambda^*, P^*)=\mathbf{0} & (15)\\ \nabla_{P} T(\Lambda^*, P^*)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \gamma_i^* \nabla_{P} h_i(P^*)+\sum_{j=1}^{l} \beta_j^* \nabla_{P} g_j(\Lambda^*, P^*)=\mathbf{0} & (16)\\ \beta_j g_j(\Lambda^*, P^*)=0 \qquad j=1,2,\cdots,l\\ \beta_j\geq 0 \qquad j=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

根据复合函数的求导公式, 有

$$\nabla_{\Lambda} T(\Lambda^*, P^*) = \nabla_{\Lambda} f(\Lambda^*, P^*, \Psi(\Lambda^*, P^*)) + [D(\Lambda^*, P^*)]^T \nabla_S f(\Lambda^*, P^*, \Psi(\Lambda^*, P^*)) \tag{17}$$

式中

$$D(\Lambda^*, P^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\psi_1(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_n} \\ \frac{\partial\psi_2(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\psi_2(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_2(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_n(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\psi_n(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n(\Lambda^*, P^*)}{\partial\lambda_n} \end{bmatrix}$$

由式(13)可知

$$\nabla_S f(\Lambda^*, P^*, S^*) = \mathbf{0} \tag{18}$$

将 $\Psi(\Lambda^*, P^*) = S^*$ 代入式(17), 得

$$\nabla_{\Lambda} T(\Lambda^*, P^*) = \nabla_{\Lambda} f(\Lambda^*, P^*, S^*) \tag{19}$$

同理有

$$\nabla_P T(\Lambda^*, P^*) = \nabla_P f(\Lambda^*, P^*, S^*) \tag{20}$$

把式(19), (20)分别代入(15), (16), 再由式(18)可知:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^* \\ P^* \\ S^* \end{pmatrix}, \gamma_i^* \ (i = 1, 2, \cdots, m), \beta_j^* \ (j = 1, 2, \cdots, l)$$

满足规划问题(Ⅱ)的 K－T 条件式(11), 又因 2 个规划问题的约束条件相同, 所以若 $\begin{pmatrix} \Lambda^* \\ P^* \end{pmatrix}$ 是规划问题(III)的 K－T 点, 则

$$\begin{pmatrix} \Lambda^* \\ P^* \\ S^* \end{pmatrix}$$

就是规划问题(Ⅱ)的 K－T 点。这样就可以通过求解规划问题(III)的 K－T 点, 得到规划问题(Ⅱ)的 K－T 点。在实际问题中, K－T 点就是问题的最优解。

下面, 将问题(III)的目标函数式(14)整理。由式(5), (12)及(13)可得

$$S = \Psi(\Lambda, P) = \begin{pmatrix} \psi_1(\Lambda, P) \\ \psi_2(\Lambda, P) \\ \vdots \\ \psi_n(\Lambda, P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_{21}/v_{11})^{1/2} P_1 \\ (v_{22}/v_{12})^{1/2} P_2 \\ \vdots \\ (v_{2n}/v_{1n})^{1/2} P_n \end{pmatrix}$$

将其代入式(14), 并回代式(5)得

$$\min G = T(\Lambda, P) = f(\Lambda, P, S) = \sum_{k=1}^{n} (c_k \lambda_k + 2(v_{1k} v_{2k})^{1/2} P_k)$$

可见, 目标函数(式(14))是线性函数, 所以, 规划问题(III)可作为电力网的线性规划模型。

5　结束语

本文中的讨论基于 Λ, P, S 均为连续变量。根据整数规划的分支定界法求解原理可知, 整数规划的求解是通过求解一系列的非整数规划问题来实现的, 而其中的每一个规划问题都是问题(Ⅱ)的形式, 因此, 可通过求解与之对应的形如问题(Ⅲ)的线性规划问题来得到非线性规划问题(Ⅱ)的 K－T 点, 当 Λ 为 0－1 整型变量时, 这一结论仍然成立。

参　考　文　献

1　Adms R N. Optimal planning of power networks using mixedinteger programming. Proc IEE, 1974, 121(2): 139～147

2　Gonen T. Distribution system planning using mixed-integer programming. Proc IEE, 1981, 128(2): 70～79

3　许跃进. 城市电力网的综合规划. 北京农业工程大学学报, 1993, 13(1): 66～71

4　韩新阳. 用改进的遗传算法进行输电网网架优化规划的研究: [学位论文]. 中国农业大学, 1997

5　魏权龄. 数学规划与优化设计. 北京: 国防工业出版社, 1984. 121～140