中国农业大学学报 1999,4(4):69～73
Journal of China Agricultural University

伺服控制系统跟踪任意输入函数的研究

韩 聚 奎①
(中国农业大学车辆工程学院)

摘 要 为了使设计指标能保证伺服控制系统准确地跟踪任意输入函数,研究了一种基于对收敛傅里叶级数响应的分析方法:以任意输入函数能满足傅里叶级数展开条件为前提,将输入函数以奇函数形式展成满足误差要求的有限项傅里叶级数,推证出稳定线性定常系统对该三角级数的响应,确定了输入函数频谱特性与系统频域误差的关系,给出了频域内系统能跟踪任意输入函数的设计指标。

关键词 伺服控制系统;频域;跟踪误差
分类号 TP 275

Study on Servo Control System Tracking Arbitrary Input Function

Han Jukui
(College of Vehicle Engineering,CAU)

Abstract In order to accurately track the arbitrary input function, an analysis method for the response to couvergent Fourier series is studied. Based on the satisfying to the unfolding condition of Fourise series, the input function is unfolded to the limited item Fourise series of singular function in the error range. The relation between the frequency characteristic of input function and the frequency domain error of system is determined. The design indicators of the system tracking arbitrary input function is given.

Key words servo control system; frequency domain; response error

由于伺服控制系统的输入信号通常是随时间而变化的任意函数,因此给系统的分析和设计带来很大困难。常用的分析或设计方法是以相近于任意输入函数的典型信号作为系统的输入信号,分析该典型信号作用下的系统性能,以此来估计系统在比较复杂的实际任意输入函数作用下的跟踪特性[1]。

鉴于以上方法的局限性,笔者提出并论证一种在频域内研究分析伺服控制系统跟踪任意输入函数的方法。该方法以系统输入函数能展成傅里叶级数为前提,首先需将输入函数以奇函数形式展成满足系统误差要求的有限项傅里叶级数,求解线性定常系统对该三角级数的响应,以系统允许误差为限定条件,给出基于该方法的系统跟踪特性的性能指标。

1 输入函数的傅里叶级数

为了避免求解任意输入函数作用下复杂的系统输出函数,设想将输入函数展成傅里叶级数,进而讨论系统对该傅里叶级数的响应。

收稿日期:1999-01-04
①韩聚奎,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)47 信箱,100083

一般来说，在工程上的大多数系统输入函数定义于 $t\geqslant 0$ 的定义域上，若有一任意输入函数 $R(t)$ 在定义域 $t\in[0,l]$ 上满足狄利克莱(Dirichlet)条件，可在 $[-l,0]$ 上补充输入函数 $R(t)$ 的定义，使其在 $[-l,l]$ 上为奇函数，即补充定义后的输入函数 $R(t)$ 在 $[-l,0]$ 上的图形与其在 $[0,l]$ 上的图形对于原点是对称的，该输入函数 $R(t)$ 则展成如下傅里叶级数：

$$R(t)=\sum_{N=1}^{\infty}b_N\sin N\omega t \tag{1}$$

式中

$$\omega=\frac{\pi}{l}$$

$$b_N=\frac{2}{l}\int_0^l R(t)\sin N\omega t\mathrm{d}t$$

式(1)又可写成

$$R(t)=\sum_{N=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l R(t)\sin N\omega t\mathrm{d}t\right]\sin N\omega t \tag{2}$$

2 线性定常系统对傅里叶级数的响应

设有一线性定常系统，其输入函数 $R(t)$ 与输出函数 $C(t)$ 的关系用以下微分方程表示：

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i P^{n-i}C(t)=\sum_{j=0}^{m}\beta_j P^{m-j}R(t) \tag{3}$$

式中：$\alpha_n,\alpha_{n-1},\cdots,\alpha_1,\alpha_0,\beta_m,\beta_{m-1},\cdots,\beta_1,\beta_0$ 为常数；n,m 为正整数，且 $n\geqslant m$，以及 $P=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$。将式(2)代入(3)得

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i P^{n-i}C(t)=\sum_{j=0}^{m}\beta_j P^{m-j}\left[\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l R(t)\sin N\omega t\mathrm{d}t\right)\sin N\omega t\right] \tag{4}$$

如果 $R(t)$ 的傅里叶级数的 m 阶导数存在并收敛，对式(4)取拉普拉斯变换，并根据其变换的线性和微分性质以及初始条件均为零，得到

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i s^{n-i}c(s)=\sum_{j=0}^{m}\beta_j s^{m-j}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N\omega\frac{2}{l}\int_0^l R(t)\sin N\omega t\mathrm{d}t}{(s+\mathrm{j}N\omega)(s-\mathrm{j}N\omega)}$$

又有

$$C(s)=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\sum_{j=0}^{m}\beta_j s^{m-j}}{\sum_{i=0}^{n}\alpha_i s^{n-i}}\frac{N\omega\frac{2}{l}\int_0^l R(t)\sin N\omega t\mathrm{d}t}{(s+\mathrm{j}N\omega)(s-\mathrm{j}N\omega)}=$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\sum_{j=0}^{m}\beta_j s^{m-j}b_N N\omega}{\sum_{i=0}^{n}\alpha_i s^{n-i}(s+\mathrm{j}N\omega)(s-\mathrm{j}N\omega)} \tag{5}$$

式(5)又可表示成

$$C(s)=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{A(s)b_N N\omega}{\prod_{i=0}^{n}(s-s_i)(s+\mathrm{j}N\omega)(s-\mathrm{j}N\omega)} \tag{6}$$

$s_0, s_1, \cdots, s_n$ 为系统闭环传递函数的极点。若系统稳定,则这些极点均具有负实部,于是式(6)又可写成

$$C(s)=\sum_{N=1}^{\infty}\left[\frac{C'_N}{s+\mathrm{j}N\omega}+\frac{\overline{C'_N}}{s-\mathrm{j}N\omega}+\frac{a_{1N}}{s-s_1}+\frac{a_{2N}}{s-s_2}+\cdots+\frac{a_{nN}}{s-s_n}\right] \tag{7}$$

式中 $C'_N, \overline{C'_N}, a_{1N}, a_{2N}, \cdots, a_{nN}$为待定系数。对式(7)取拉氏逆变换得到系统对输入为傅里叶级数的响应

$$C(t)=\mathscr{L}^{-1}[C(s)]=\sum_{N=1}^{\infty}[C'_N\exp(-\mathrm{j}N\omega t)+\overline{C'_N}\exp(\mathrm{j}N\omega t)+ a_{1N}\exp(s_1t)+a_{2N}\exp(s_2t)+\cdots+a_{nN}\exp(s_nt)]$$

由于稳定线性定常系统的闭环传递函数的极点具有负实部,因此,系统的稳态响应为

$$C(t)=\sum_{N=1}^{\infty}[C'_N\exp(-\mathrm{j}N\omega t)+\overline{C'_N}\exp(\mathrm{j}N\omega t)]=\sum_{N=1}^{\infty}C_N\sin(N\omega t+\varphi_N) \tag{8}$$

以上分析表明:如果任意输入函数能展成傅里叶级数,则该级数的 m 阶导数存在且收敛,当以该三角级数的形式作用于稳定线性定常系统时,其系统稳态输出响应也为三角级数。

3　系统跟踪误差分析

若系统的输出函数 $C(t)$与输入函数 $R(t)$满足以下关系式,则认为系统误差 $e(t)$满足系统跟踪精度的要求:

$$|e(t)|=|R(t)-C(t)|\leqslant\varepsilon_r R_{\max}\quad t\in[0,l] \tag{9}$$

式中:ε_r 为允许的系统相对误差;$R_{\max}$为输入函数最大绝对值。

如果输入函数 $R(t)$可按前述方法展成傅里叶级数,且系统为稳定的线性定常系统,则式(9)又可表示为

$$|e(t)|=|R(t)-s_\nu(R)+s_\nu(R)-s_\nu(c)+s_\nu(c)-C(t)|\leqslant\varepsilon_r R_{\max}$$

由绝对值运算可知,下式若满足,则系统能保证跟踪精度:

$$|R(t)-s_\nu(R)|+|s_\nu(R)-s_\nu(c)|+|s_\nu(c)-C(t)|\leqslant\varepsilon_r R_{\max}$$

式中:$s_\nu(R)$是输入函数 $R(t)$的前 ν 项的傅里叶级数,写成

$$s_\nu(R)=\sum_{N=1}^{\nu}b_N\sin N\omega t$$

$s_\nu(c)$是系统对 $s_\nu(R)$傅里叶级数的闭环响应,由前述推证结果可知,$s_\nu(c)$的表达式可写成

$$s_\nu(c)=\sum_{N=1}^{\nu}C_N\sin(N\omega t+\varphi_N)$$

显然,当系统的设计能保证以下各式得到满足时,表明系统能够以所要求的精度跟踪输入函数:

$$|R(t)-s_\nu(R)|\leqslant(1/3)\varepsilon_r R_{\max} \tag{10}$$

$$|s_\nu(R)-s_\nu(c)|\leqslant(1/3)\varepsilon_r R_{\max} \tag{11}$$

$$|s_n(c)-C(t)|\leqslant(1/3)\varepsilon_r R_{\max}$$

4　输入函数的有效频宽

对于按前述方法展成傅里叶级数的输入函数 $R(t)$,由函数逼近论可知,任给一正数 η 总

可找到一正整数 ν 使得下列不等式成立：

$$\left|R(t)-\sum_{N=1}^{\nu}b_N\sin N\omega t\right|\leqslant\eta \qquad t\in[0,l]$$

令 $\eta=(1/3)\varepsilon_r R_{\max}$，又知

$$s_\nu(R)=\sum_{N=1}^{\nu}b_N\sin N\omega t$$

则有

$$\left|R(t)-\sum_{N=1}^{\nu}b_N\sin N\omega t\right|=|R(t)-s_\nu(R)|\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon_r R_{\max} \tag{12}$$

显然，式(12)就是式(10)。本文定义正整数 ν 与输入函数 $R(t)$ 的傅里叶级数基频频率 ω 的乘积为输入函数有效频宽 ω_ν，即

$$\omega_\nu=\nu\omega=\nu\pi/l$$

从频宽指标来看，线性定常系统的频宽 ω_H 应大于输入函数的有效频宽，即 $\omega_H>\omega_\nu$，才能保证系统的跟踪精度要求。

5　跟踪任意输入函数的频域指标

如果稳定线性定常系统对有限项傅里叶级数 $s_\nu(R)$ 的闭环稳态响应为

$$s_\nu(c)=\sum_{N=1}^{\nu}C_N\sin(N\omega t+\varphi_N)$$

则可将式(11)写成

$$|s_\nu(R)-s_\nu(c)|=\left|\sum_{N=1}^{\nu}b_N\sin N\omega t-\sum_{N=1}^{\nu}C_N\sin(N\omega t+\varphi_N)\right|=$$

$$\left|\sum_{N=1}^{\nu}[(b_N-C_N\cos\varphi_N)\sin N\omega t-C_N\sin\varphi_N\cos N\omega t]\right|\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon_r R_{\max} \tag{13}$$

式(13)中的 b_N,C_N,φ_N 均为 $N\omega$ 的函数，可记成 $b_N(N\omega),C_N(N\omega),\varphi_N(N\omega)$，并令

$$C_N(N\omega)=b_N(N\omega)[1-\Delta(N\omega)] \tag{14}$$

式中 $\Delta(N\omega)$ 为各谐波分量上的系统相对频域误差。将式(14)代入式(13)得

$$|s_\nu(R)-s_\nu(c)|=\left|\sum_{N=1}^{\nu}b_N(N\omega)\{1-\cos[\varphi_N(N\omega)]+\Delta(N\omega)\cos[\varphi_N(N\omega)]\}\sin(N\omega t)-\right.$$

$$\left.b_N(N\omega)\{\sin[\varphi_N(N\omega)]-\Delta(N\omega)\sin[\varphi_N(N\omega)]\}\cos N\omega t\right|=$$

$$\left|\sum_{N=1}^{\nu}E_N(N\omega)\sin[N\omega t+\theta_N(N\omega)]\right|\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon_r R_{\max} \tag{15}$$

式中

$$E_N(N\omega)=b_N(N\omega)\{[1-\cos(\varphi_N(N\omega))+\Delta(N\omega)\cos(\varphi_N(N\omega))]^2+$$
$$[\sin(\varphi_N(N\omega))-\Delta(N\omega)\sin(\varphi_N(N\omega))]^2\}^{1/2}$$

$$\theta_N(N\omega)=\arctan\{[\sin(\varphi_N(N\omega))-\Delta(N\omega)\sin(\varphi_N(N\omega))]\cdot$$
$$[-[1-\cos(\varphi_N(N\omega))+\Delta(N\omega)\cos(\varphi_N(N\omega))]]^{-1}\}$$

若令 $E_{\max}$ 为 $E_N(N\omega)$ 各项中具有最大值的一项，由式(15)得

$$
\begin{aligned}
|s_\nu(R)-s_\nu(c)| &= \left|\sum_{N=1}^{\nu} E_N(N\omega)\sin[N\omega t+\theta_N(N\omega)]\right| \leqslant \\
&\left|\sum_{N=1}^{\nu} E_N(N\omega)\right| \leqslant \\
&\nu|E_{\max}| \leqslant (1/3)\varepsilon_r R_{\max}
\end{aligned} \tag{16}
$$

又因当 $\varphi_N(N\omega)=0$ 或 $\varphi_N(N\omega)$ 很小时,有 $\cos[\varphi_N(N\omega)]\approx 1$,$\sin[\varphi_N(N\omega)]\approx 0$,则近似地有 $E_N(N\omega)=b_N(N\omega)\Delta(N\omega)$。

若 $b_1(\omega)$ 为输入函数 $R(t)$ 的基频项幅值,$\Delta_{\max}$ 为 $\Delta(N\omega)$ 各项中具有最大绝对值的一项,则有 $E_{\max}=b_1(\omega)\Delta_{\max}$;于是式(16)又成为

$$
\begin{aligned}
|s_\nu(R)-s_\nu(c)| &= \left|\sum_{N=1}^{\nu} b_N(N\omega)\Delta(N\omega)\sin N\omega t\right| \leqslant \\
&\left|\sum_{N=1}^{\nu} b_N(N\omega)\Delta(N\omega)\right| \leqslant \\
&\nu|b_1(\omega)\Delta_{\max}| \leqslant (1/3)\varepsilon_r R_{\max}
\end{aligned}
$$

或

$$
|\Delta_{\max}| \leqslant \frac{\varepsilon_r R_{\max}}{3\nu b_1(\omega)} = \frac{\varepsilon_r \omega R_{\max}}{3\omega_\nu b_1(\omega)} \tag{17}
$$

式(17)给出闭环系统对傅里叶级数的稳态响应具有较小相位变化时的频域指标,该指标表明在设计过程中,只要得到输入函数的频谱特性,就可确定闭环系统频率特性的最大相对允许误差,进而按该误差要求进行系统频域设计。

6 结　论

如果任意输入函数在 $t\geqslant 0$ 定义域上定义,并满足傅里叶级数展开的条件,为了确定系统跟踪该任意输入函数的特性,则可将该输入函数展成满足系统允许误差要求的有限项傅里叶级数;若稳定线性定常系统对该傅里叶级数的稳态响应仍为三角级数,当该稳态响应相角变化较小时,则可确定输入函数频谱特性与系统频率最大相对误差的关系。这一关系为系统在任意输入函数作用下的响应特性的设计与分析提供了可靠而简便的依据。

参 考 文 献

1　蔡尚峰. 自动控制理论. 北京:机械工业出版社,1980. 10～11