

## 坡面降雨径流的一种数值模拟方法

黄 兴 法<sup>①</sup>

(中国农业大学机械工程学院)

**摘 要** 根据水力学原理建立了坡面降雨径流模型,用特征线方法求解,并用所编制的计算机模拟程序对某一具体降雨过程进行了模拟计算,所得结果与用水文学方法得到的结果相近。

**关键词** 降雨;坡面径流;特征线方法;计算机模拟

**中图分类号** S157.1

## A Numerical Method for Evaluating the Slope Land Runoff by Rain

Huang Xingfa

(College of Machinery Engineering, CAU)

**Abstract** The model of the rain-runoff on slope land is developed and the solution is obtained by using the method of characteristics line. The simulation program of the model was compiled, and a real rain process for the runoff was simulated by this program. Results were compared with the ones obtained by another mathematic model, and they are closely similar.

**Key words** rain event; slope land runoff; method of characteristics line; computer simulation

目前全世界的土地资源以每年 0.7% 的速度减少,土壤侵蚀和荒漠化使农田损失分别达 300 万  $\text{hm}^2$  和 200 万  $\text{hm}^2$ ,到 2000 年,农业土地可能损失  $1/5 \sim 1/3$ <sup>[1~3]</sup>;因此对土壤侵蚀及其防治途径的研究,日益引起人们的普遍关注。从 19 世纪后 30 年开始,对土壤侵蚀规律及沙漠化控制途径的研究一直受到各国学者的重视。到本世纪 40 年代,人们逐步开展了对水蚀风蚀机理的研究。60 年代中期,Wischemier, Smith 和 Woodruff, Siddoway 分别提出了通用土壤流失方程(USLE)和风蚀方程(WEQ),它们虽然是一种基于因子的经验模型,但 20 多年来一直是发达国家进行土壤侵蚀预报和水土保持规划的有力工具。然而迄今为止,对土壤侵蚀过程的发生发展规律及其物理-力学机制的探讨还比较薄弱,仍沿用传统的经验性方法来预报流失量和产沙量,而且现在所用的模型并不能给出单次侵蚀事件所造成的实际侵蚀量,只能预报年平均潜在侵蚀量,使其应用范围受到一定的限制;因此引入流体力学的原理和方法,把基于因子(factor-based)的模型提高为基于过程(process-based)的模型来分析土壤侵蚀机理,这对于提高我国土壤侵蚀量的预报预测水平十分重要。

水蚀是土壤侵蚀中的一个重要方面,它是由水流引起的土壤表面物质的移动,主要来自降

收稿日期:1996-09-12

①黄兴法,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)146 信箱,100083

雨事件。当降雨强度大于入渗率时,就会出现地表径流。在平缓坡地上,降雨是导致土壤颗粒分离的主要因素,而径流则是造成土壤颗粒输移,从而形成土壤水蚀的主要因素;因此笔者拟针对一次降雨事件引起的土壤地表径流作力学分析,为今后对土壤侵蚀量及土壤输移率等的研究工作提供基础。

## 1 坡面径流模型

坡面径流的物理图形如图 1 所示。此问题在水文学上采用的是集总式运动波模型,即在假定坡脚水源与坡面蓄量成线性关系的前提下,得出水源、流量与时间的关系模型<sup>[4]</sup>。在作某些假设之后,可得到解析解,而在一般情况下较难获得数值解。本文中从水力学角度对该问题一般情况下的数值解进行研究,以求得到更大的应用范围。

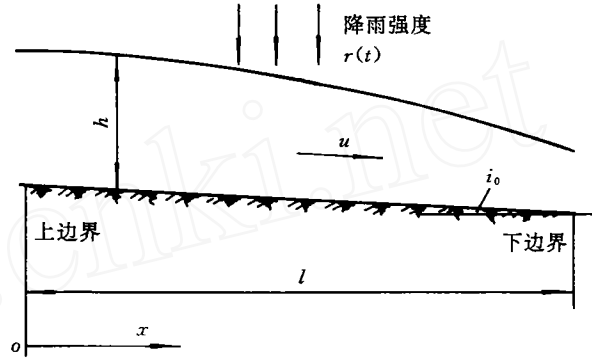


图 1 坡面径流示意图

根据水力学中的明渠不稳定流运动方程<sup>[5]</sup>及柱面水流质量和动量守恒定理,可得到控制坡面径流运动的一维圣维南不稳定流方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = r & \text{(连续方程)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i_0 - i_t) - \frac{ur}{h} & \text{(动量方程)} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $h$ 为地表径流水深, $m$ ;  $u$ 为径流水运动速度, $m \cdot s^{-1}$ ;  $r$ 为旁侧入流率, $mm \cdot h^{-1}$ ;  $i_0$ 为坡面坡降;  $i_t$ 为阻力坡降;  $g$ 为重力加速度, $g = 9.81 m \cdot s^{-2}$ ;  $x, t$ 分别为距离与时间(空间坐标以上游边界点为起点,向下游边界方向为正,详见图 1)。令  $q = uh$ ,称为单宽流量, $m^2 \cdot s^{-1}$ ,因此式(1)可写为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r$$

水流的阻力坡降曼宁公式为

$$i_t = \frac{n^2 u}{h^{4/3}}$$

式中  $n$  为曼宁糙率系数。

方程组(1),(2)的初始条件。以开始降雨时为初始点,坡面上各点无径流出现。假设坡面长度为  $l$ ,则

$$\begin{cases} h(x, t) |_{t=0} = 0.0 \\ u(x, t) |_{t=0} = 0.0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (3)$$

$$(4)$$

边界条件。以一个标准的径流试验小区为模拟对象,在坡面顶部(即  $x=0$  处) $h, u$  均为 0, 即

$$\begin{cases} h(x,t)|_{x=0}=0, 0 & (t>0) \\ u(x,t)|_{x=0}=0, 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

式(1)~(6)即为一维情况下的降雨坡面径流模型,由该模型即可对坡面上各点的  $u, h$  值求解。

## 2 模型求解

### 2.1 模型的变换

方程(1),(2)为双曲型偏微分方程,一般情况下具有 2 条特征线,因此可采用特征线方法<sup>[6]</sup>求解。令方程(2)的右端项为  $G$ ,即

$$G = g(i_0 - i_t) - \frac{ru}{h} \quad (7)$$

对方程(1),(2)进行组合变换,得

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial t} + (u + \lambda g) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \lambda \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h + \lambda u}{\lambda} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] = r + \lambda G \quad (8)$$

令

$$\frac{dx}{dt} = u + \lambda g = \frac{h + \lambda u}{\lambda} \quad (9)$$

称式(9)为方程组(1),(2)的特征线方程,则方程(8)变为

$$\left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \right) + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = r + \lambda G$$

即

$$\frac{dh}{dt} + \lambda \frac{du}{dt} = r + \lambda G \quad (10)$$

即把式(1),(2)的偏微分方程组转化为沿特征线的常微分方程(10)。式(10)中的系数  $\lambda$  由式(9)可求出  $u + \lambda g = (h + \lambda u)/\lambda$ ,得

$$\begin{aligned} \lambda^2 g &= h \\ \lambda_{\pm} &= \pm (h/g)^{1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

因此特征线方程为

$$W_{\pm} = \frac{dx}{dt} = u \pm g(h/g)^{1/2} = u \pm (gh)^{1/2} \quad (12)$$

故可将方程(1)~(6)的模型转化为下列模型:

$$\left. \begin{cases} \frac{dh}{dt} + \lambda_+ \frac{du}{dt} = r + \lambda_+ G \\ \frac{dx}{dt} = u + \lambda_+ g \end{cases} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{cases} \frac{dh}{dt} + \lambda_- \frac{du}{dt} = r + \lambda_- G \\ \frac{dx}{dt} = u + \lambda_- g \end{cases} \right\} \quad (14)$$

对方程组(13),(14)进行时间及空间上的离散化,网格剖分及其特征线状况如图 2 所示。

对于在  $t_k$  时刻,内部任一节点  $P_j$  的 2 条特征线分别为  $P_j L_j$  和  $P_j R_j$ ,交于  $t_{k-1}$  时刻线上的

点  $L_j$  和点  $R_j$  (见图 2)。特征线  $P_jL_j$  的方程为  $dx/dt = u + \lambda_+g$ , 特征线  $P_jR_j$  的方程为  $dx/dt = u + \lambda_-g$ 。在左边界点, 只有一条特征线  $P_1R_1$ ; 右边界点也有一条特征线  $P_nL_n$ 。在点  $P_i (i=1, 2, \dots, n)$  对方程组 (13), (14) 进行离散, 共可得到  $(2n-2)$  个方程, 而方程组共有  $2n$  个变量, 因此还需要补充 2 个边界条件。

左边界:  $h(x, t)|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \quad (15)$

右边界: 在水流非稳定期和稳定期, 出口处水流规律是不同的, 根据水文学理论<sup>[4]</sup>, 可以得到

$$u(x, t)|_{x=L} = \begin{cases} \frac{\sqrt{i_f}}{n} \cdot r^{2/3} t^{2/3} & \text{(非稳定期)} \\ \left(\frac{\sqrt{i_f}}{n}\right)^{3/5} \cdot (Lr)^{2/5} & \text{(稳定期)} \end{cases} \quad (16)$$

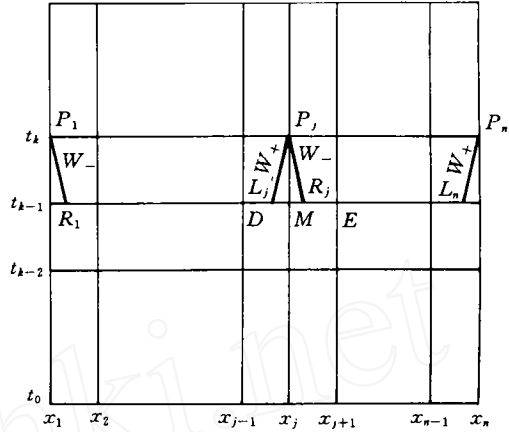


图 2 网格划分及特征线状况

2.2 模型在时间和空间上的离散

沿着特征线方向将方程组 (13), (14) 在点  $P_i (i=1, 2, \dots, n)$  进行离散。记  $t_{k-1}$  时刻点  $L$  和  $R$  的径流深度分别为  $H_L$  和  $H_R$ , 速度分别为  $U_L$  和  $U_R$ ,  $t_k$  时刻点  $P$  的径流深度和速度分别为  $H_P$  和  $U_P$ , 则式 (13), (14) 变为

$$\begin{cases} (H_P - H_L) + \lambda_+(U_P - U_L) = (r + \lambda_+G)\Delta t & (17) \\ (H_P - H_R) + \lambda_-(U_P - U_R) = (r + \lambda_-G)\Delta t & (18) \end{cases}$$

式中  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 。

记  $t_{k-1}$  时刻点  $P_{j-1}, P_j$  和  $P_{j+1}$  分别为  $D, M$  和  $E$  (见图 2), 则点  $L_j, R_j$  的线性插值分别为

$$H_L = H_M + \frac{(W_+)_M \Delta t}{\Delta x_+} (H_D - H_M) \quad (19)$$

$$U_L = U_M + \frac{(W_+)_M \Delta t}{\Delta x_+} (U_D - U_M) \quad (20)$$

$$H_R = H_M + \frac{(W_-)_M \Delta t}{\Delta x_-} (H_M - H_E) \quad (21)$$

$$U_R = U_M + \frac{(W_-)_M \Delta t}{\Delta x_-} (U_M - U_E) \quad (22)$$

式中:  $\Delta x_+ = x_j - x_{j-1}, \Delta x_- = x_{j+1} - x_j$  为空间离散步长, 若取为均匀, 则  $\Delta x_+ = \Delta x_- = \Delta x = x_j - x_{j-1}$ ;  $(W_+)_M, (W_-)_M$  分别为点  $M$  沿特征线  $W_+, W_-$  上的特征值。

由式 (17), (18) 可得

$$H_P = \frac{1}{2} (H_L + H_R) + r\Delta t + \lambda_+(U_L - U_R) \quad (23)$$

$$U_P = U_R + \frac{1}{\lambda_-} [(H_R - H_P) + (r + \lambda_-G)\Delta t] \quad (24)$$

先根据已知条件,将式(11)和(19)~(22)代入式(23)算出沿坡面各点的  $H_P$  值,然后将  $H_P$  值及其他已知条件代入式(24)算出各点的  $U_P$  值。这样,可由  $t_{k-1}$  状况计算出  $t_k$  时刻各网格点的  $H_P$  和  $U_P$  值,又由  $t_k$  时刻状况计算  $t_{k+1}$  时刻各网格点的相应值,……,一直计算到用户所需要的计算时间  $t_n$  为止。

### 3 模型的编程计算及其验证

根据式(11)~(24)各模型,编制了求解该模型的计算机程序,并用该程序对某一具体的降雨过程进行模拟计算。所用的降雨事件是文献[4]中的一个具体实例。

设  $l=50\text{ m}$ ,  $n=0.015$ ,  $l_0=0.01$ ,  $r=25\text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ , 求坡脚处在净雨历时  $t_r$  = 平衡时间  $t_s$  和  $t_r=4\text{ min}$  时相应的出流过程。

计算和验证结果见图 3 和表 1 与表 2。可以看出,这 2 种方法计算的结果很接近,最大流量之差在  $t_r=t_s$  和  $t_r=4\text{ min}$  时分别为 12.30% 和 0.53%, 出现峰值流量的时间基本相同,其他值也均较相近。

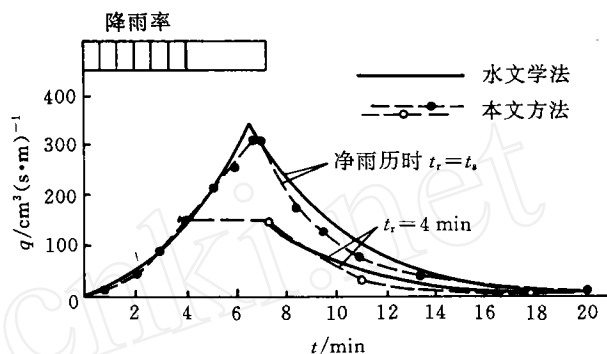


图 3 用水文学法计算和模拟的坡脚出流过程

表 1 坡脚上涨流量( $q$ )过程  $10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

方法	$t/\text{min}$							
	0	1	2	3	4	5	6	6.46
水文学法 <sup>[4]</sup>	0	1.53	4.87	9.55	15.42	22.38	30.32	34.75
本文方法	0	1.52	4.85	9.57	15.34	21.32	24.41	30.45

表 2 退水流量( $q$ )过程  $10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

方法	$t/\text{min}$										
	$t_r=t_s$ 时						$t_r < t_s$ 时				
	7.02	8.51	9.54	11.00	13.67	20.00	4.00	6.94	8.57	11.08	17.82
水文学法 <sup>[4]</sup>	30.0	20.0	15.0	10.0	5.0	1.0	15.42	15.42	10.0	5.0	1.0
本文方法	30.45	17.96	13.36	9.72	6.21	2.27	15.34	15.94	12.60	4.79	2.94

### 4 结论与讨论

本文模拟结果与文献[4]中利用水文学原理计算结果相近,表明两者均可以反映坡面降雨径流的大体规律,但由于这 2 种方法所采用的模型不同,对模型的各自假设也有差异,所得结果存在差别在所难免,尤其是在涨流和退水后期数值相差较大。笔者认为文献[4]采用坡脚水深与坡面蓄量成正比的假设是一个主要的原因。根据曼宁单宽流量公式,它们之间的关系应是非线性的。本文采用了曼宁公式。

今后的工作在此基础上用多次实际降雨事件对该模型和程序进行验证,并进一步比较 2

种方法的准确性,同时根据实际情况,针对原模型存在的问题和不足,对模型作必要的修改和补充,使之更符合实际情况,能应用于绝大多数坡面降雨径流的模拟,从而为提高土壤水蚀预测的准确性和精度提供有力手段。

#### 参 考 文 献

- 1 戚隆溪,陈启生,陶 锋. 土壤侵蚀的流体力学机制——水蚀. 力学进展. 1995,25(4):501~504
- 2 Brown L R. The global loss of topsoil. J of soil and water cons,1984,39:162~165
- 3 Lal R. Soil Erosion Research Methods. Soil and Water Conservation Society, 1988. 630~650
- 4 文 康,金管生,李 琪,等. 地表径流过程的数学模拟. 北京:水利电力出版社,1990. 137~151
- 5 徐正凡. 水力学(下册). 北京:高等教育出版社,1987. 90~143
- 6 卞振举,周雪漪. 一种圣维南方程组的隐式特征线解法. 水动力学研究与进展,1991,6(3):29~34